



Ingeniería eléctrica

¡Hola! 😊

Quiero darte las gracias por elegirnos como tu compañero de estudio. Tu dedicación y esfuerzo como estudiante son realmente inspiradores, y nos enorgullece ser parte de tu camino hacia el éxito. Sabemos que cada detalle cuenta, y por eso nuestros apuntes están diseñados para que puedas enfrentar este curso universitario con total confianza y seguridad.

Recuerda, el esfuerzo de hoy es la base de tus logros de mañana. Sigue dando lo mejor de ti, que estamos aquí para apoyarte en cada paso. ¡A por todas este semestre!

Y cuando necesites más recursos, ya sabes que cuentas con nosotros para hacer de tu estudio una experiencia aún más enriquecedora.

¡Mucho ánimo y sigue brillando! ✨

Saludos,

Laura Huergo, fundadora y directora general de Cosmic Notes.



**COSMIC NOTES**

# ÍNDICE:

Primera parte:

**Primer tema:** Introducción. Elementos activos y pasivos de los circuitos eléctricos. **Pág. 4-12**

**Segundo tema:** Análisis de funciones de onda periódicas. **Pág. 13-15**

**Tercer tema:** Teoría de fasores aplicada al análisis de circuitos de corriente alterna. **Pág. 16-25**

**Cuarto tema:** Potencia eléctrica. **Pág. 25-35**

**Quinto tema:** Teoremas generales de circuitos. **Pág. 36-44**

**Ejercicios propuestos y de examen parte 1:** **Pág. 45-79**

Segunda parte:

**Sexto tema:** Sistemas trifásicos. **Pág. 79-98**

**Séptimo tema:** Inductores. **Pág. 99-101**

**Octavo tema:** Transformadores. **Pág. 101-114**

**Noveno tema:** Máquinas eléctricas. **Pág. 115-119**

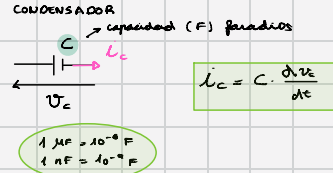
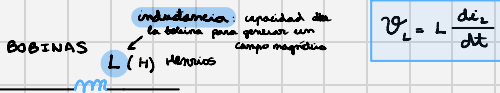
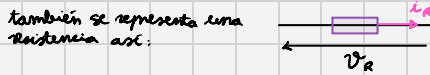
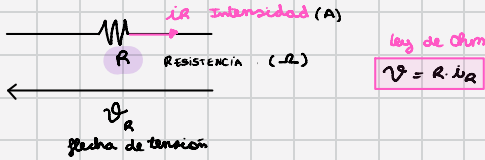
**Resúmenes concisos:** **Pág. 120-126**

**Exámenes resueltos**

# A. Introducción

## Elementos de los circuitos

### Elementos pasivos

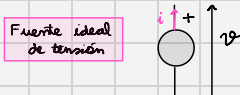


Cuando un elemento es pasivo la dirección de la intensidad va al contrario que la flecha de tensión

**Nota:** en la bobina  $L$  la intensidad  $i_L$  no cambia bruscamente

**Nota 2:** en un condensador  $C$  la  $v_C$  no cambia bruscamente.

### Fuentes

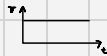


- la referencia de tensión apunta al más
- $i$  tiene el mismo sentido que  $v$ .

Tipos:



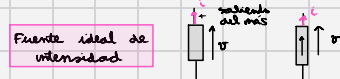
- $v$  siempre la misma
- $i$  depende del circuito conectado



### Fuentes de alterna



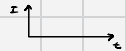
- $v(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \sin(\omega t)$  es siempre la misma **senoidal**
- $i$  depende del resto de circuito



Tipos:

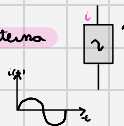
Fuentes de continua:

- la  $I = 6.6$  A siempre
- $v$  depende del resto del circuito

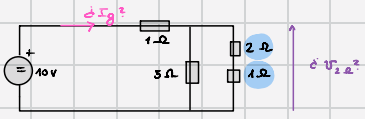


### Fuentes de alterna

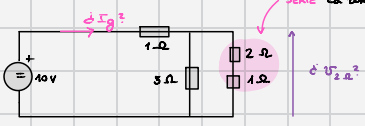
Senoidal



Ej. analizar: Corriente continua

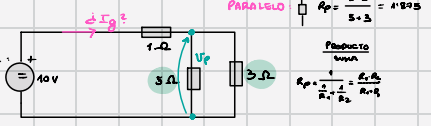


RESOLUCIÓN

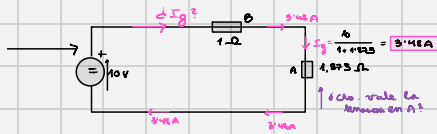


SEER la resistencia equivalente es:  $2 + 1 = 3\Omega$

análog que:



$R_p = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3} = 1.5\Omega$   
 PRODUCTO DIVIDIDO  
 $R_p = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3} = 1.5\Omega$



$V = R \cdot I_2$ ;  $V = 1.5 \cdot 3.148 = 4.722V$   
 $V_2 = \frac{1}{2} \cdot 4.722 = 2.361V$

2ª ley de Kirchhoff

Cuando tenemos una malla (camino cerrado) la suma de las tensiones tiene que dar 0.  
 $10 - 3.148 - 6.152 = 0$

¿Cómo calcular  $I_{3\Omega}$  y  $I_{2\Omega}$ ?

$V = R \cdot I$ ;  $6.152 = 5 \cdot I_{3\Omega}$ ;  $I_{3\Omega} = 1.230A$   
 $6.152 = 3 \cdot I_{2\Omega}$ ;  $I_{2\Omega} = 2.05A$



La suma de las intensidades que entran al nodo es igual a la suma de las intensidades que salen = la suma de las intensidades que circulan en el nudo = 0.

$3.148 = 1.230 + 2.05$

¿CÓ. vale la tensión 1 y 2?

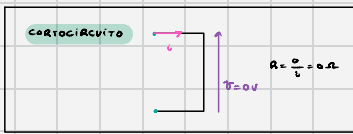
$V_A = 2 \cdot 2.05 = 4.102$   
 $V_B = 1 \cdot 2.05 = 2.05$

$P_{consumida \text{ por } R} = R \cdot I_A^2$   
 $P_{cede \text{ la fuente}} = V \cdot I$   
 $P_{cedida} = \sum P_{consumida \text{ por la resistencia}}$   
 $10 \cdot 3.148 = 1.9488 + \dots$

Diferencias:



no pasan  $e^- \rightarrow I = 0A$   
 $V$  depende del resto del circuito



$R = 0V$   
 $I$  depende del resto del circuito

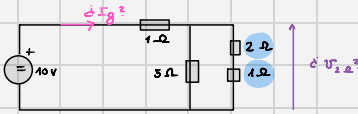
fuentes de tensión de 0V

Nota: cuando tenemos un circuito con fuente de corriente todas las intensidades y tensiones del circuito son constantes en el tiempo en (apto equis ausencia) últimos permanentes o estacionarios

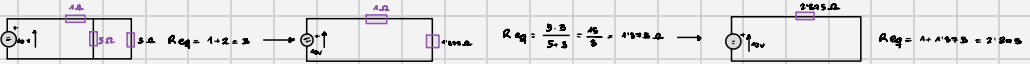
$V_c = L \frac{di_c}{dt} = 0$  se comporta como un cortocircuito

$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = 0$  se comporta como un circuito abierto

ANALIZA ESTE CIRCUITO

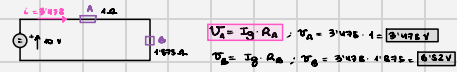


PRIMERA PASO: OBTENER  $I_g$



$V = I_g \cdot R_{eq}$ ;  $10 = I_g \cdot 2.5$ ;  $I_g = 0.498$

SEGUNDO PASO: OBTENER LA TENSION EN A Y B



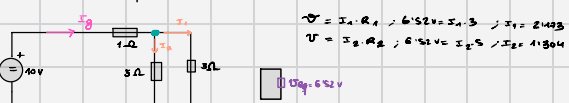
$V_A = I_g \cdot R_A$ ;  $V_A = 0.498 \cdot 1 = 0.498V$   
 $V_B = I_g \cdot R_B$ ;  $V_B = 0.498 \cdot 3 = 1.494V$

TERCER PASO: COMPROBAR LEYES DE KIRCHOFF

1ª Ley de Kirchhoff: "La suma de las corrientes que entran en un nudo han de ser igual a la suma de las corrientes que salen"

NUDO: punto de unión de dos o más componentes.

Por ejemplo:



$V = I_1 \cdot R_1$ ;  $6.52V = I_1 \cdot 3$ ;  $I_1 = 2.173$   
 $V = I_2 \cdot R_2$ ;  $6.52V = I_2 \cdot 5$ ;  $I_2 = 1.304$

$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$ ;  $0.498 = 2.173 + 1.304$

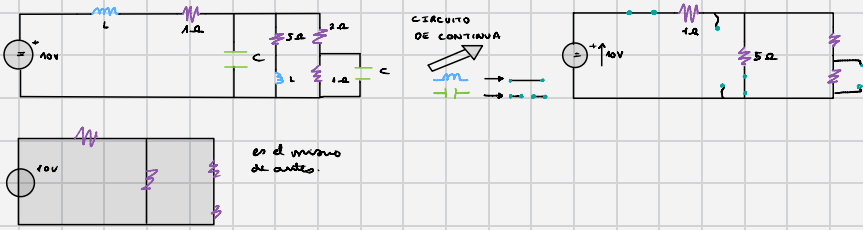
2ª Ley de Kirchhoff: "La suma de las tensiones en un circuito cerrado (malla) es 0"



$10 - 0.498 - 6.52 = 0V$



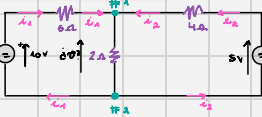
Ejercicio 2:



Ej B:

Obtener aplicando las leyes de Kirchoff

$n = 2$  nodos  $\rightarrow$  Aplicamos la 1ª ley de Kirchoff  $n - 1$

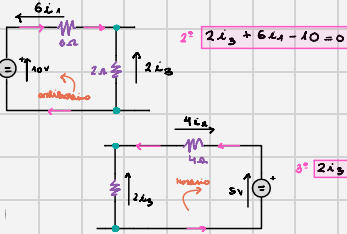


#1  
 $i_1 + i_2 = i_3$   
 $i_1 + i_2 - i_3 = 0$   
 $i_1, i_2$ : entran  
 $i_3$ : sale

INCÓGNITAS  $\begin{cases} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{cases}$   
 $r = 3$  ramas

necesitamos 2 ecuaciones más  $\rightarrow n^\circ$  incógnitas  $\cdot n^\circ$  ec que tenemos  
 $r - (n - 1)$

APLICAMOS LA 2ª LEY DE KIRCHOFF:  $r - (n - 1) = 3 - (2 - 1) = 2$  ec. más.  
 para cada ecu  $n^\circ$  de ec.



SISTEMA DE EC:

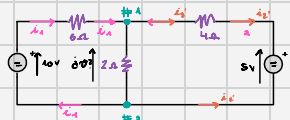
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$i_1 = 1.1569 \text{ A}$   
 $i_2 = 0.4848 \text{ A}$   
 $i_3 = 1.5909 \text{ A}$

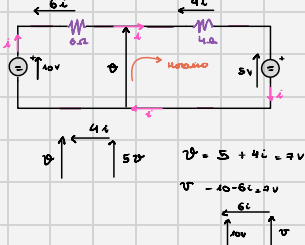
¿Y si hubiéramos tomado  $i_2'$  (opuesta de  $i_2$  en sentido contrario)?

Repetiendo todo  $\rightarrow i_1 = 1.1569 \text{ A}$   
 $i_2' = -0.4848 \text{ A}$   
 $i_3 = 1.5909 \text{ A}$

Entonces el sentido real hubiera sido el contrario a la referencia.



2ª. Parte: ¿Cú. vale la tensión  $v$ ?



Aplicamos la 2ª ley de Kirchoff

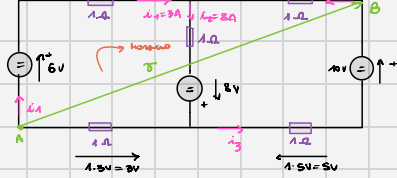
$10 - 6i - 4i = 0 \rightarrow i = 0.5 \text{ A}$

¿Cuál es la potencia que cede el generador de corriente?  
 $P = 10 \cdot 0.5 = 5 \text{ W}$

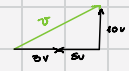
Potencia absorbida por el generador de tensión.  
 $P = -0.5 \cdot 5 = -2.5 \text{ W}$



Ej: Calcular  $V$  y  $I_1, I_2, I_3$ .  $V =$  tensión entre A y B.

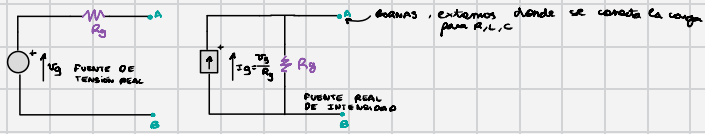


$V = 8 - 0 + 10 = 8V$



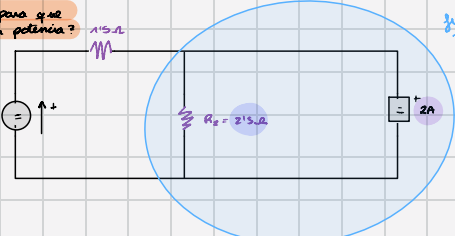
**Equivalencia de fuentes reales**

estas dos fuentes son equivalentes para el cálculo de  $V$  e  $i$  en el circuito conectado entre A y B.

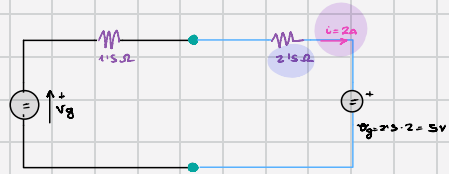


**EJEMPLO:**

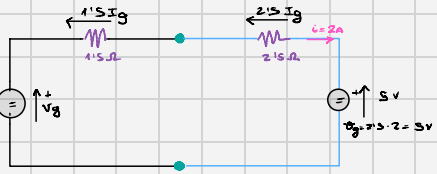
Ej: ¿ $V_g$  para que cada potencia?



TRANSFORMAMOS

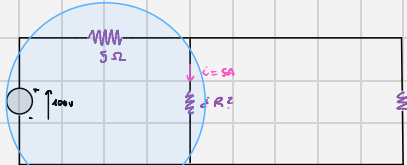


Pérdida =  $V_g I_g$   
 si  $I_g > 0 \rightarrow$  Pérdida  $> 0$

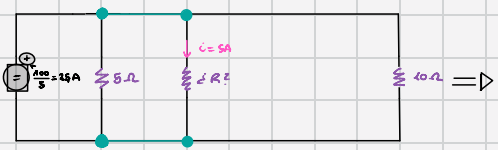


$V_g - 1.5I_g - 2.5I_g - 5 = 0$   
 $I_g = \frac{V_g - 5}{1.5 + 2.5} > 0; \quad V_g > 5V$

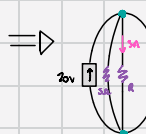
Ej. 5 ¿Valor de A para que  $V = 5A$ ?



TRANSFORMAR

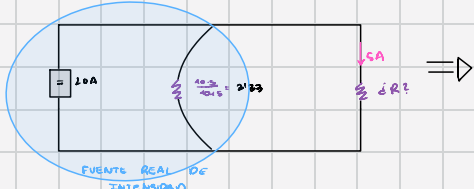
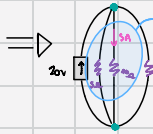


FUENTE REAL DE TENSION

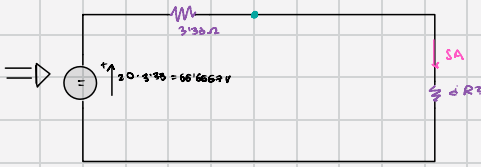


Dividimos eq. a paralelo

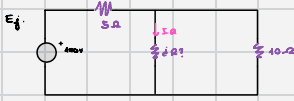
$\frac{5 \cdot 10}{5 + 10} = 3.33 \Omega$



FUENTE REAL DE INTENSIDAD

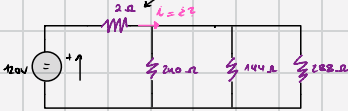


$$5A = \frac{66'6667}{3'33 + R_2} \quad ; \quad R_2 = 10 \Omega$$



¿ Resistencia para que consuma 250W? Sol.:  $\begin{cases} 10 \Omega \\ 1'000 \Omega \end{cases}$

Ej. 6 Moodle : Batería de 120V (indica que es una fuente de corriente) alimenta a través de una línea 3 cargas de características nominales (sumamos mejor con 120V y resistencias en paralelo)



$$P = \frac{V^2}{R} ; R_1 = \frac{120^2}{60} = 240 \Omega$$

$$R_2 = \frac{120^2}{100} = 144 \Omega$$

$$R_3 = \frac{120^2}{50} = 288 \Omega$$

- A) intensidad total que suministra la batería
- B) Tensión a la que están alimentadas las cargas
- C) Potencia suministrada por la batería en caso de que se desconecte la carga 3

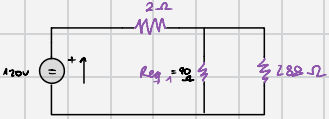
Si la batería tuviera una resistencia interna:

La batería está con una resistencia interna.

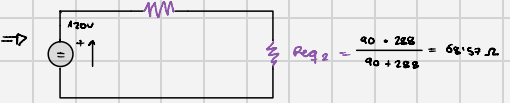
La batería está con una resistencia interna.

¡ Duda !  
¿ Cómo sabe mos por el enunciado que las resistencias están en paralelo ?

A) la intensidad total



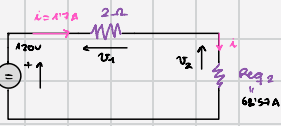
$$Req_1 = \frac{240 \cdot 144}{240 + 144} = 90 \Omega$$



$$Req_2 = \frac{90 + 288}{90 + 288} = 68.57 \Omega$$

$$i = \frac{V}{R} ; i = \frac{120V}{2 + 68.57 \Omega} = 1.7A$$

B) Tensión a la que están alimentadas las cargas

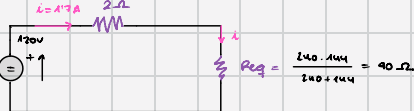
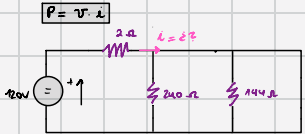


$$V_1 = 1.7A \cdot 2 \Omega = 3.4V$$

$$V_2 = 1.7A \cdot 68.57 \Omega = 116.569V = V_3 = V_4$$

el voltaje es el mismo en todas las resistencias en paralelo

C) Potencia suministrada por la batería en caso de que se desconecte la carga 3



$$Req = \frac{240 \cdot 144}{240 + 144} = 40 \Omega$$

$$i = \frac{V}{R_T} ; i = \frac{120V}{90 + 2} = 1.304A$$

$$P = 120V \cdot 1.304A = 156.52W$$



Ex. 2016

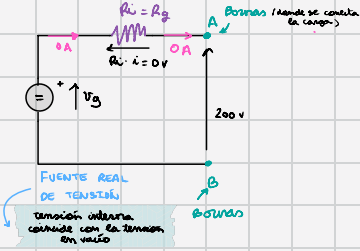
Una fuente real de tensión continua se conocen:

→ es lo mismo que circuito abierto, no hay carga conectada.

-La tensión en vacío:  $200\text{V}$

-Si se conecta una resistencia  $R_c = 20\Omega$ , circulan  $8\text{A}$ .

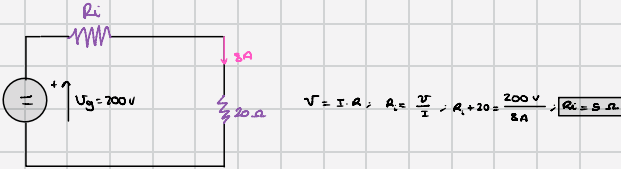
Dibujar la fuente con sus valores de  $V_g$  y  $R_g$



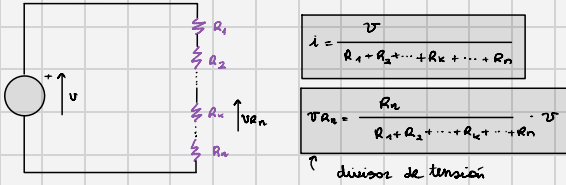
2ª ley de Kirchhoff: "La suma de las tensiones en un circuito cerrado (malla) es 0"

$$V_g - R_i i - 200 = 0 \quad \boxed{V_g = 200}$$

Ahora busquemos  $R_i$ :



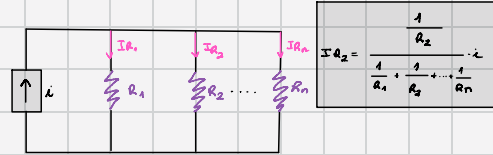
Nota importante:



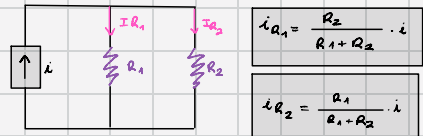
Nomenclatura:

- $i$ : general
- $I$ : continua
- $\bar{I}$ : forosco

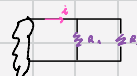
Nota importante 2:



Si tenemos 2 resistencias:



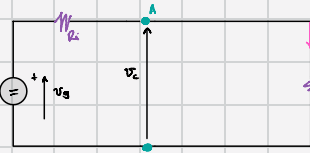
o así también:





Fuente real de tensión

Fuente ideal de tensión



$I_c$  depende de  $R_c$  que conectamos

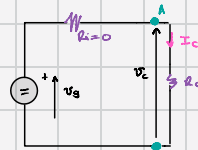
$$I_c = \frac{V_g}{R_i + R_c}$$

$$V_c = \frac{R_c}{R_i + R_c} \cdot V_g$$

$V_c$  depende de la  $R_c$  que conectamos

$R_i$ : resistencia interna

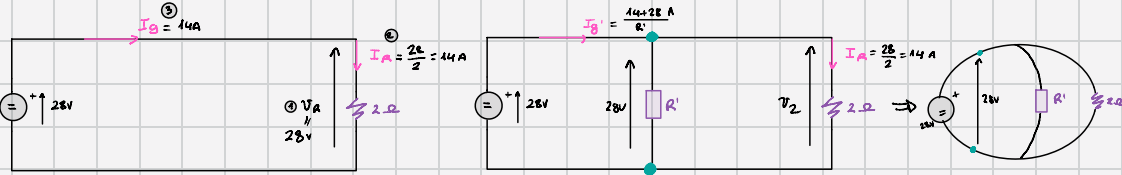
Si  $R_i \approx 0\Omega$  (cortocircuitos)



$V_c = V_g \rightarrow I_c = \frac{V_g}{R_c}$

$V_c$  no depende de  $R_c$   
 $\rightarrow$  la tensión de la fuente no depende del circuito conectado.

Ej:

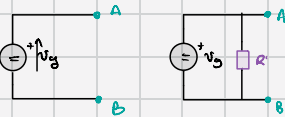


Fuente ideal de tensión

El voltaje es el mismo en todas las resistencias en paralelo

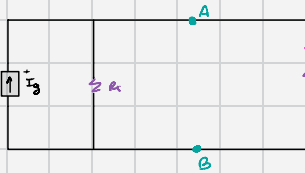
Fuente ideal de tensión en paralelo con algo

**Conclusión:** una fuente de tensión ideal, de tensión  $V_g$ , y una fuente de tensión  $V_g$  en paralelo con algo... van a ser **equivalentes** para el cálculo de tensiones e intensidades en las resistencias o en el circuito que conectemos entre A y B



Fuente real de intensidad

Fuente ideal de intensidad

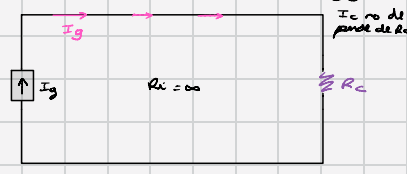


$$I_c = \frac{R_i}{R_i + R_c} \cdot I_g$$

$I_c$  depende de la carga conectada  $R_c$



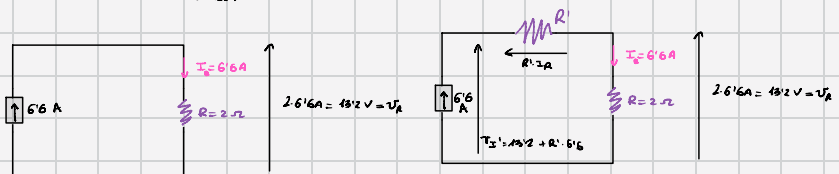
La intensidad de cortocircuito coincide con la intensidad interna.



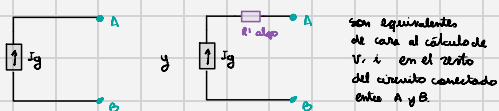
$I_c = I_g$

$I_c$  no depende de  $R_c$

Ej:

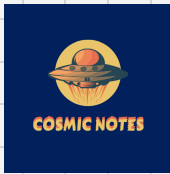
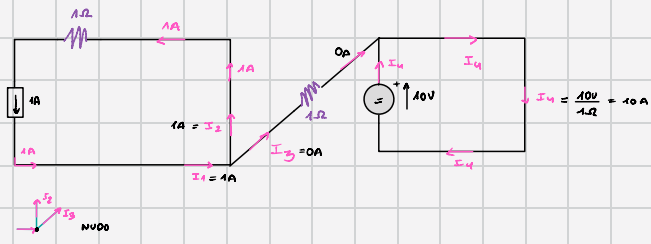


NOTA:



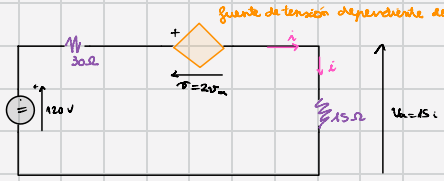
son equivalentes de cara al cálculo de  $V_c$  i en el resto del circuito conectado entre A y B.

¿Cuánto vale  $I_1, I_2, I_3, I_4$ ?



1ª ley de Kirchhoff: "la suma de los corrientes que entran en un nodo han de ser igual a la suma de las corrientes que salen"

luego llega 1A y salen 1A,  $I_3 = 0A$ .



$$120 - 30i - 2V_x - 15i = 0 \rightarrow 120 - 30i - 2 \cdot 15i - 15i = 0, \boxed{i = 16A}$$

$$V_x = 15i$$

# EXERCICIOS TEMA 1: CIRCUITOS ELÉCTRICOS

$$(3+j)I_1 - (1+j)I_2 = 100 \angle 0 - \sqrt{2}$$

$$(3+j)I_1 - (1+j)I_1 - (1+j)9.19 \angle 45 = 100 \angle 0 - \sqrt{2}$$

$$2I_1 + \sqrt{2} = 100 \angle 0 + (1+j)9.19 \angle 45$$

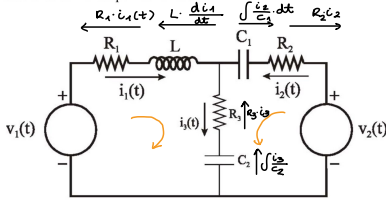
$$\begin{matrix} I_1 & \sqrt{2} & \angle \\ 2 & 1 & 113.1691 - 0.23 \end{matrix}$$

$$-(1+j)I_1 + (3-j)I_1 + (3-j)9.19 \angle 45 = \sqrt{2}$$

$$\begin{matrix} I_1 & \sqrt{2} & \angle \\ 2-2j & -1 & 31.31 \angle 1.18 \end{matrix}$$



1. Escribir la ecuación temporal que se obtiene al aplicar la Ley de Kirchhoff para las tensiones a la malla exterior del circuito de la figura, respetando el sentido dado a las corrientes por las ramas.



$$\int v_1(t) - R_1 \cdot i_1(t) - L \frac{di_1}{dt} - R_2 \cdot i_2 = 0$$

$$\int v_2(t) - R_2 \cdot i_2 - \int \frac{i_2}{C_1} - R_3 \cdot i_3 - \int \frac{i_3}{C_2} = 0$$

$$v_1(t) - v_2(t) - R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 - L \frac{di_1}{dt} + \int \frac{i_2}{C_1} + \int \frac{i_3}{C_2} = 0$$

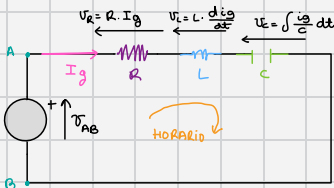
$$v_1(t) - v_2(t) - R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 - L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_2 dt + \frac{1}{C_2} \int i_3 dt = 0$$

2. Cita los elementos pasivos ideales de los circuitos eléctricos, indicando en cada uno de ellos su símbolo, la ecuación temporal que relaciona la tensión [v(t)] y la intensidad [i(t)], su constante característica y la unidad en la que se expresa la misma en el Sistema Internacional.

Elemento	Símbolo	Unidad (ens.I.)	Relación entre v(t) y i(t)
Resistencia		ohmios (Ω)	$v_R = I_R \cdot R$
Bobina		Henrios (H)	$v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$
Condensador		Faradios (F)	$v_C = \int \frac{i_C}{C} dt$

3. Determina la ecuación diferencial que permitiría calcular la diferencia de tensión entre los extremos de un circuito formado por una resistencia, una bobina y un condensador conectados en serie y atravesados por una intensidad de corriente i(t) no sinusoidal.

→ continua

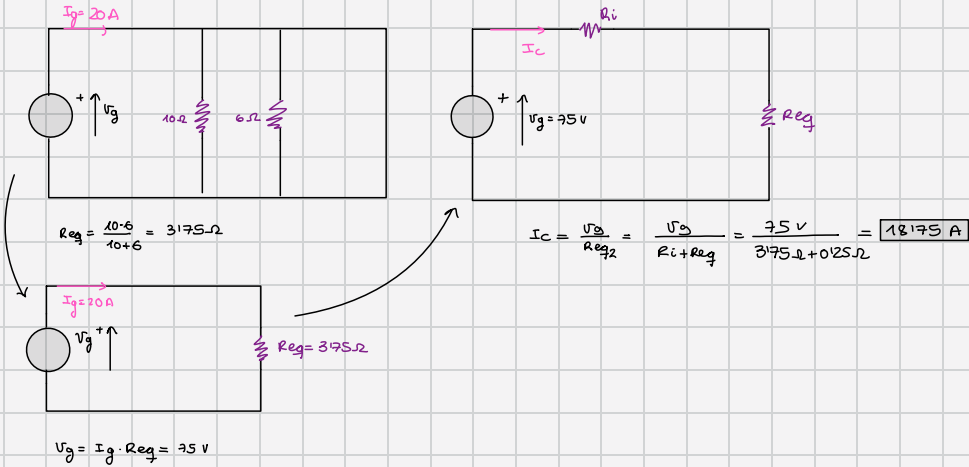


2ª ley de Kirchhoff: la suma de tensiones en un circuito cerrado es igual a 0

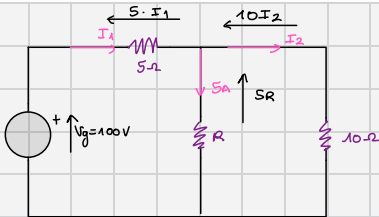
$$v_{AB} - R \cdot I_g - L \cdot \frac{di_g}{dt} - \int \frac{i_g}{C} dt = 0$$



4. Una fuente ideal de tensión de corriente continua suministra 20 A al conjunto de dos resistencias conectadas en paralelo, una de  $10\ \Omega$  y la otra de  $6\ \Omega$ . Calcula la intensidad que suministraría si se tratase de una fuente real con la misma tensión que la anterior y con una resistencia interna de  $0,25\ \Omega$ .



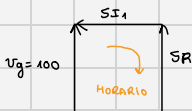
5. Una fuente real de corriente continua, compuesta de una fuente ideal de tensión de 100 V y una resistencia en serie de  $5\ \Omega$ , alimenta una resistencia desconocida  $R$  en paralelo con otra de  $10\ \Omega$ . Sabiendo que por la resistencia desconocida circula una corriente de 5 A, calcula el valor de la misma aplicando las leyes de Kirchoff.



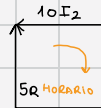
1ª ley de Kirchoff: la suma de las corrientes que salen es igual a la suma de las corrientes que entran.

$$I_1 = I_2 + 5$$

2ª ley de Kirchoff: la suma de tensiones en un circuito cerrado es igual a 0



$$100 - 5I_1 - 5R = 0$$



$$-10I_2 + 5R = 0$$

$$\left. \begin{aligned} 100 - 5I_1 - 5R &= 0 \\ -10I_2 + 5R &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 100 - 5(I_2 + 5) - 5R &= 0 \\ -10I_2 + 5R &= 0 \end{aligned}$$

$$I_1 = I_2 + 5; \quad I_1 = 10\text{ A}$$

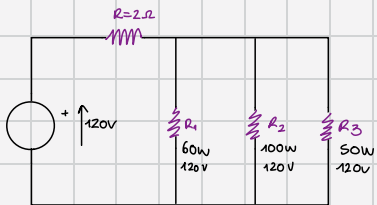
$$-10I_2 + 5R = 0; \quad -10 \cdot 5 + 5R = 0; \quad R = 10\ \Omega$$

$$100 - 10I_2 - 5I_2 - 25 = 0$$

$$-15I_2 = 25 - 100; \quad I_2 = 5\text{ A}$$



6. Una batería de 120 V alimenta, a través de una línea que presenta una resistencia total de 2 Ω, tres cargas resistivas cuyas características nominales son las siguientes: Carga 1: 120 V; 60 W. Carga 2: 120 V; 100 W. Carga 3: 120 V; 50 W. Se pide calcular: a) **La intensidad total que suministra la batería.** b) La tensión a la que están alimentadas las cargas. c) La potencia suministrada por la batería en el caso de que se desconecte la carga 3.



1º Calculamos  $R_1, R_2$  y  $R_3$

$$P_1 = \frac{V_1^2}{R_1}, 60 \text{ W} = \frac{120^2 \text{ V}}{R_1}, R_1 = 240 \Omega$$

$$100 \text{ W} = \frac{120^2 \text{ V}}{R_2}, R_2 = 144 \Omega$$

$$50 \text{ W} = \frac{120^2 \text{ V}}{R_3}, R_3 = 288 \Omega$$

2º Calculamos  $R_{eq}$

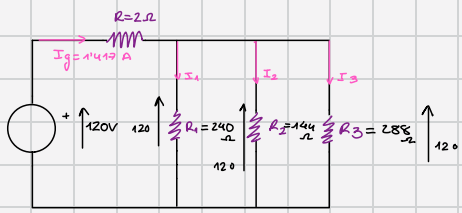
$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{240} + \frac{1}{144} + \frac{1}{288}} = 68,57 \Omega$$

3º Calculamos la intensidad de la batería.

$$I_g = \frac{V_B}{R + R_{eq}} = \frac{120 \text{ V}}{2 + 68,57 \Omega} = 1,417 \text{ A}$$

4º Voltaje que alimenta cada carga → como están en paralelo es 120V en todas.

4.1 Intensidad que circula cada carga

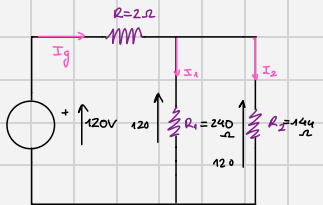


$$V_{R_1} = I_1 \cdot R_1 = 120 = I_1 \cdot 240 \Omega; I_1 = 0,5 \text{ A}$$

$$120 = I_2 \cdot 144 \Omega; I_2 = 0,8333 \text{ A}$$

$$120 = I_3 \cdot 288 \Omega; I_3 = 0,4167 \text{ A}$$

5º Potencia suministrada por la batería si quitamos la carga 3.



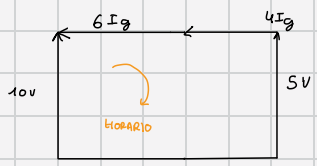
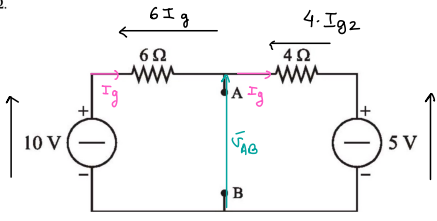
$$R_{eq} = \frac{240 \cdot 144}{240 + 144} = 90 \Omega$$

$$I_g = \frac{V_B}{R + R_{eq}} = \frac{120}{2 + 90} = 1,3 \text{ A}$$

$$P = V_B \cdot I_g = 120 \cdot 1,3043 = 156,5217 \text{ W}$$



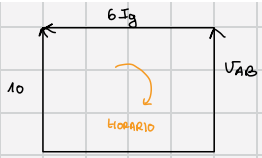
8. Calcular la intensidad que circulará por el circuito de la figura y la diferencia de potencial entre los puntos A y B suponiendo que no hay ningún elemento conectado entre ellos. Calcular la intensidad por cada rama y la diferencia de potencial entre los puntos A y B si se conectase entre ellos una resistencia de 2  $\Omega$ .



$$10 - 6I_g - 4I_g - 5 = 0$$

$$-10I_g = -5$$

$$I_g = 0.5 \text{ A}$$

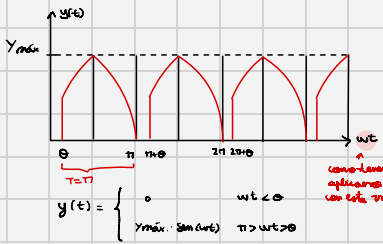
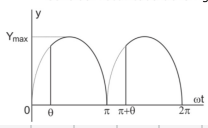


$$10 - 6I_g - V_{AB} = 0$$

$$10 - 3 - V_{AB} ; V_{AB} = 7 \text{ V}$$

**EJERCICIOS TEMA 2: ANÁLISIS DE FUNCIONES DE ONDA**

1. Hallar el ángulo  $\theta$ , expresado en grados con dos decimales, que debe tener la onda senoidal rectificadora de la figura para que su valor medio sea la mitad de su valor máximo.



calcular el valor de  $\theta$  para que  $Y_{\text{med}} = \frac{Y_{\text{máx}}}{2}$

$$Y_{\text{med}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Y_{\text{máx}} \cdot \sin(\text{wt}) \cdot d\text{wt} = \frac{Y_{\text{máx}}}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\text{wt}) d\text{wt} = \frac{Y_{\text{máx}}}{\pi} [-\cos \text{wt}]_0^{\pi}$$

*de que se puede sacar*

$$Y_{\text{med}} = \frac{Y_{\text{máx}}}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0)$$

Periodo  $T = \pi$   $\rightarrow$  frecuencia  $f = \frac{1}{\pi}$

$$Y_{\text{med}} = \frac{Y_{\text{máx}}}{\pi} (-\cos \pi + \cos \theta) = \frac{Y_{\text{máx}}}{2}$$

$$Y_{\text{med}} = \frac{Y_{\text{máx}}}{\pi} + \frac{Y_{\text{máx}} \cos \theta}{\pi} = \frac{Y_{\text{máx}}}{2}$$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{\cos \theta}{\pi} = \frac{1}{2} ; \cos \theta = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) \pi$$

$$\theta = \arccos(0.5908) ; \theta = 55.1942^\circ$$

$$Y_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (Y_{\text{máx}} \sin \text{wt})^2 d\text{wt}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Y_{\text{máx}}^2 \cdot \sin^2(\text{wt}) d\text{wt}} = \frac{Y_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{-\sin(2\text{wt}) - 2\text{wt}}{4}}$$

$$Y_{\text{ef}} = \frac{Y_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{-\sin 2\pi - 2\pi}{2} - \frac{-\sin 2\theta - 2\theta}{2}} = \frac{Y_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi - \theta + \frac{\sin 2\theta}{2}}$$

$$F_r F = \frac{Y_{\text{ef}}}{Y_{\text{med}}}$$