# Expresión Gráfica

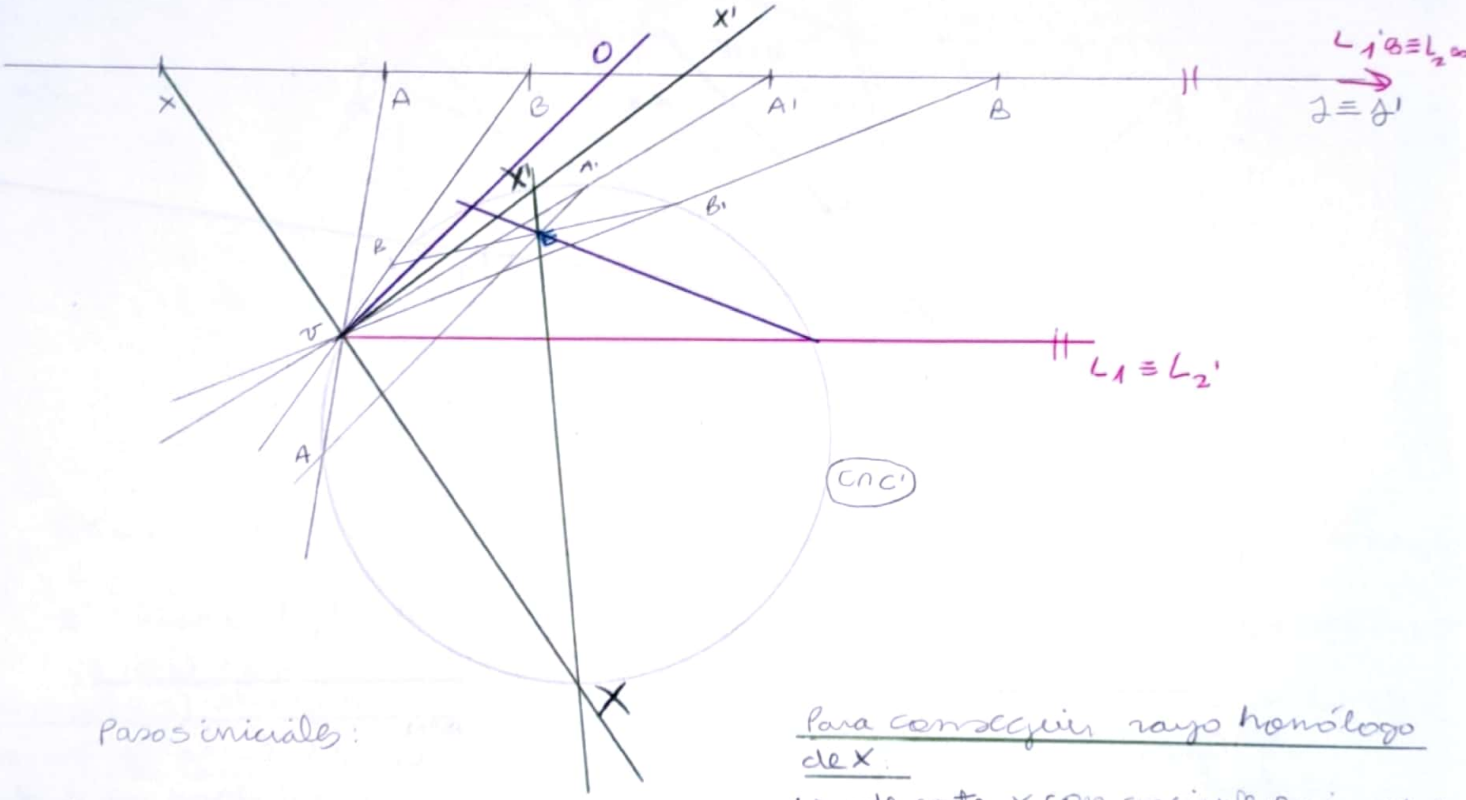
# Expresión Gráfica

## Teoría

**INVOLUCIÓN** : existe una doble correspondencia entre un pto. y su homólogo.

## Series superpuestas

Pareja de puntos homólogos A-A', B-B', rayo x




Pasos iniciales:

1º Crear circunferencia

2º Tomar vértice V arbitrario

3º Proyectar todos los ptos desde V.

4º $\begin{pmatrix} AA' \\ BB' \end{pmatrix}$ E $\boxed{\text{Pto de Fregier}}$

Para conseguir rayo homólogo de x.

1º Donde corte x con circunferencia → X

2º X con E, donde corte a circunferencia X'

3º V con X' para obtener x'

Para obtener los ptos límites.

- // por V → $L_1 \equiv L_2'$
- $L_1'\infty \equiv L_2\infty$ sobre s y s'

Para obtener el centro de la involución O (también llamado I.

1º Donde corte $L_1 \equiv L_2'$ con la circunferencia unimos a E

2º donde corte con circunferencia unimos a V.

3º Donde corte con las series, es O

del centro O a estos tiene que haber la misma distancia → son isotómicos

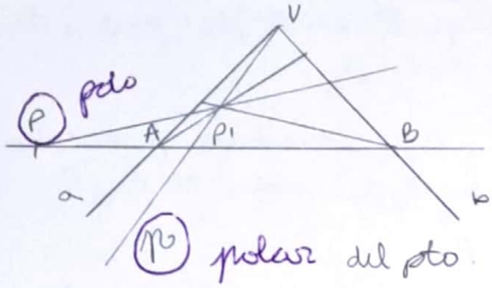
IMPORTANTE:

Si E está en el exterior de la circunferencia ⇒ $n \equiv n'$, $m \equiv m'$ reales →

Si E está en el interior ⇒ imaginarios (como en este caso)

POLARIDAD

## Polo y polar



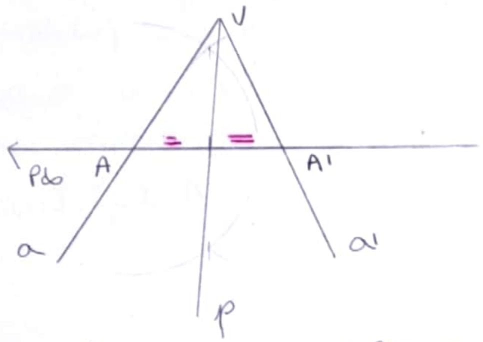

$(PP'AB) = -1$

P, A, P' y B forman una cuaterna armónica

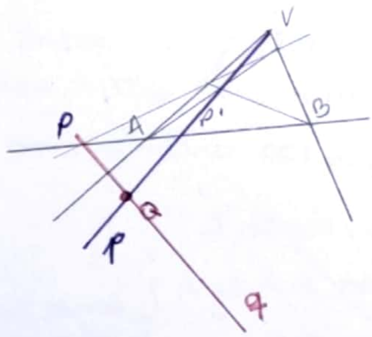
p polar del pto. P

### Propiedades

1º La polar de un pto que esté en el ∞ pasa por el pto. medio de A y A'



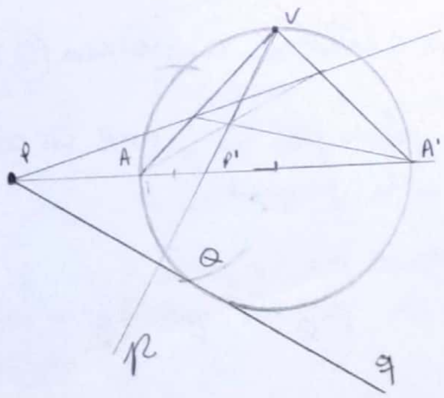

2º Un pto. Q que pase por p tiene su polar en P y es tangente a la cónica.



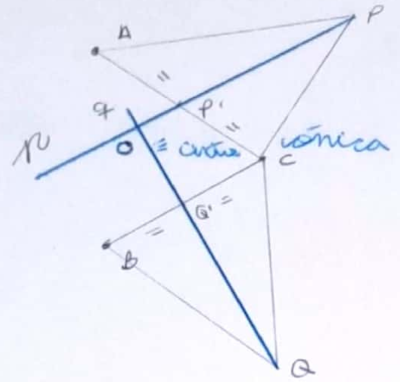

Punto Q y polar q

Punto P y polar p

3º



¿Cómo sacar el centro de la cónica a través de tres puntos de la cónica?

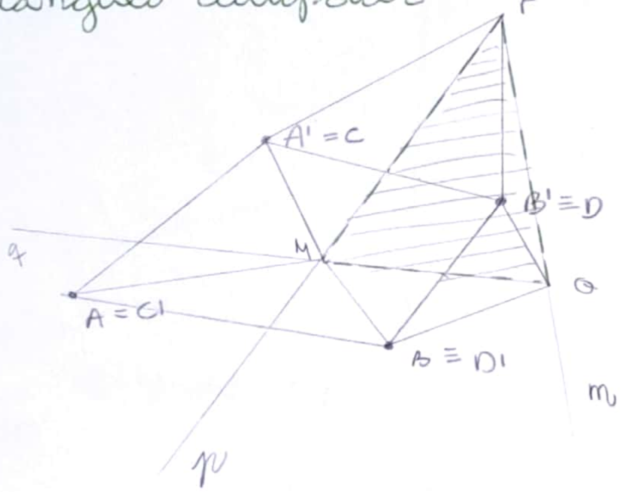



1º Prolongar A y C, forzando a que corten en P, unir P con el pto medio de A y C → polar de P, p

2º Prolongar C y B, forzando a que corten en Q, unir Q con el pto. medio de B y C → polar de Q, q

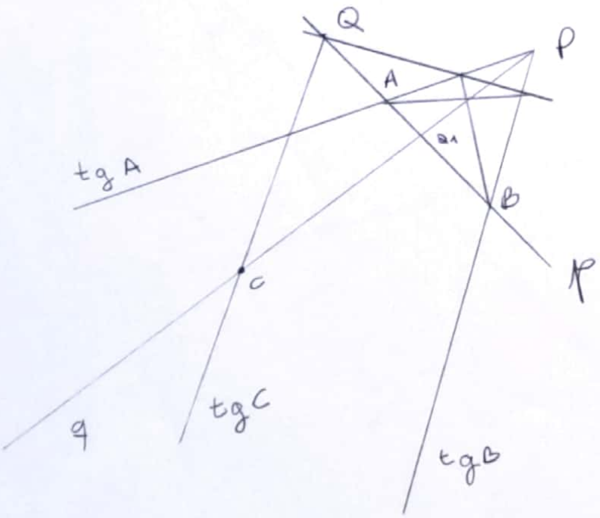
3º Donde p y q se corten está el centro de la cónica

## Triángulo autopolar




Los tres polos PQM y las tres polares (q, p, m) que se pueden definir entre dos cónicas superpuestas en involución determinan un triángulo llamado Autopolar.

Dibujo de análisis




Datos

Punto A, Punto B, Punto C

Recta que pasa por A → tg A
Recta que pasa por B → tg P } Donde cortan: polo P

Polar de P (p): recta AB

Punto Q forma cuaterna armónica (Q Q' A B) = −1

La tg de C pasa por Q y une Q con C de acuerdo a la propiedad 2.

Un pto que pase por la polar q su polar pasa por Q y es tg a la cónica.

ELEMENTOS FUNDAMENTALES EN LAS CÓNICAS

Centro: el polo de la recta impropia.

una recta impropia es aquella que se extiende hasta el $\infty$.

El polo de una recta en el $\infty$ es el centro de la cónica

Diámetros: polares de los ptos impropios de aquella recta. Todos los diámetros pasan por el centro por tanto.

Diámetros conjugados: la involución "subordinada" en la recta impropia determina direcciones conjugadas.

Trazadas desde su polo (el centro) crean pares de diámetros conjugados

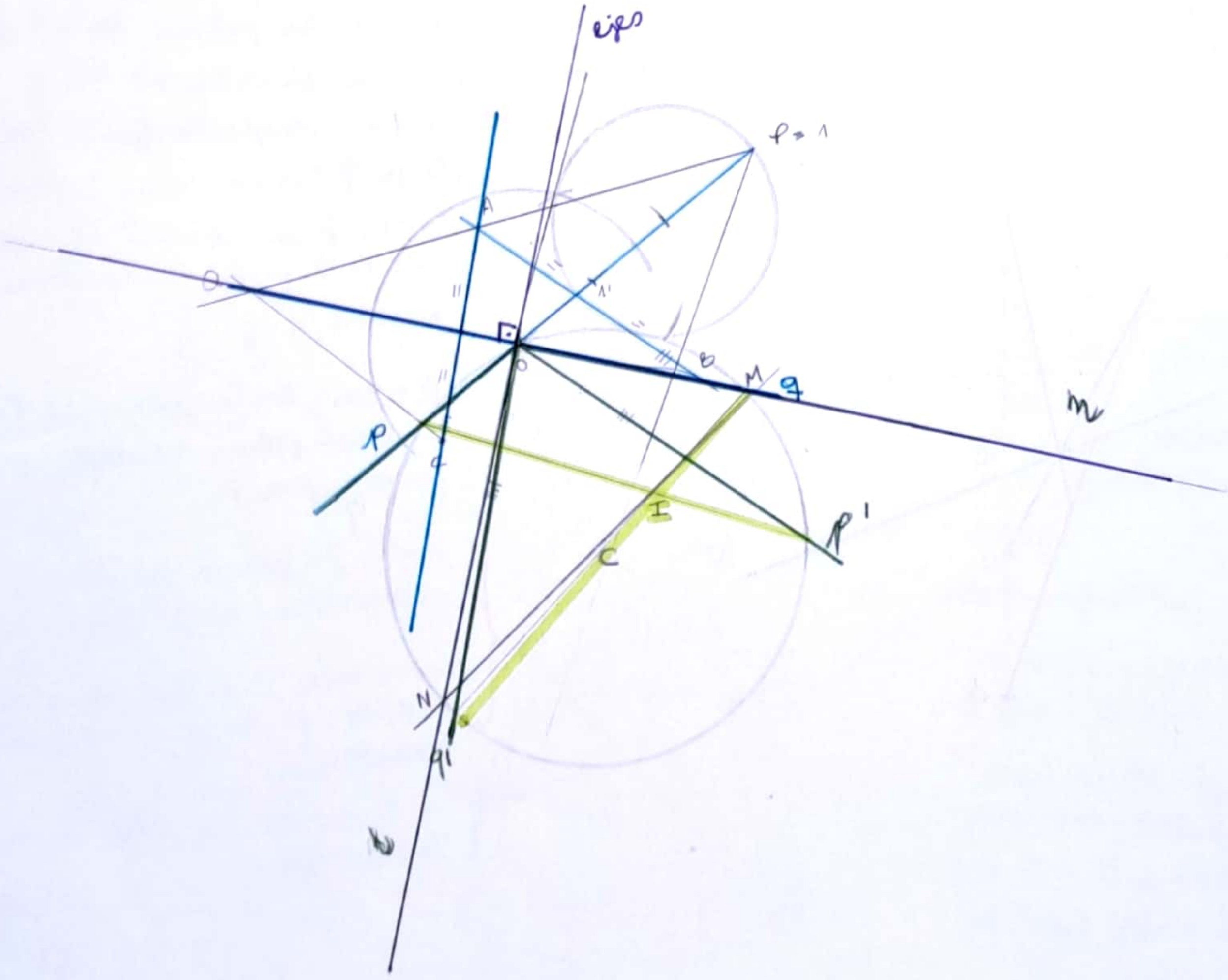
Ejes ppales. diámetros conjugados ortogonales (en la circunferencia todos son $\perp$).

Asíntotas diámetros conjugados dobles.

EXPLICACIÓN DESARROLLADA:

$\Sigma$ 1ª dirección conjugada

$\Sigma$ 2ª dirección conjugada



# ÍNDICE:

## Exámenes y ejercicios:

E.T.S.I. AERONÁUTICA
Y DEL ESPACIO

etsiae UPM

**Expresión Gráfica** **Cuaderno de prácticas – Curso 2021-2022**

| | |
|---|---|
| 1er Apellido | |
| 2º Apellido | |
| Nombre | |

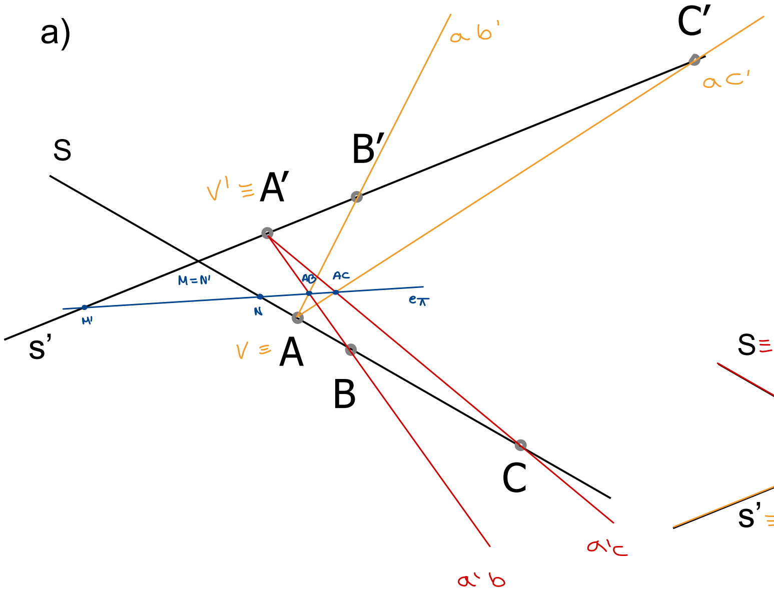
**NOTA**

**GP-15** **G. Proyectiva**

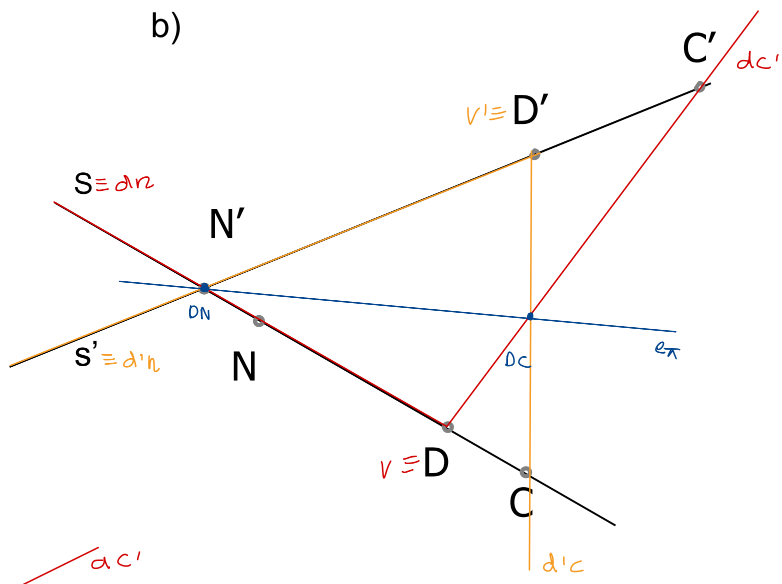
El ejercicio debe ir acompañado de una **Explicación Razonada** en la que se exponga de forma breve y concisa los conceptos teóricos en los que se fundamenta la resolución del problema. Una **Figura de Análisis** puede ayudar a reforzar los conceptos expuestos.

**1.- Determinar el eje proyectivo. Poner notación según los conceptos empleados..**

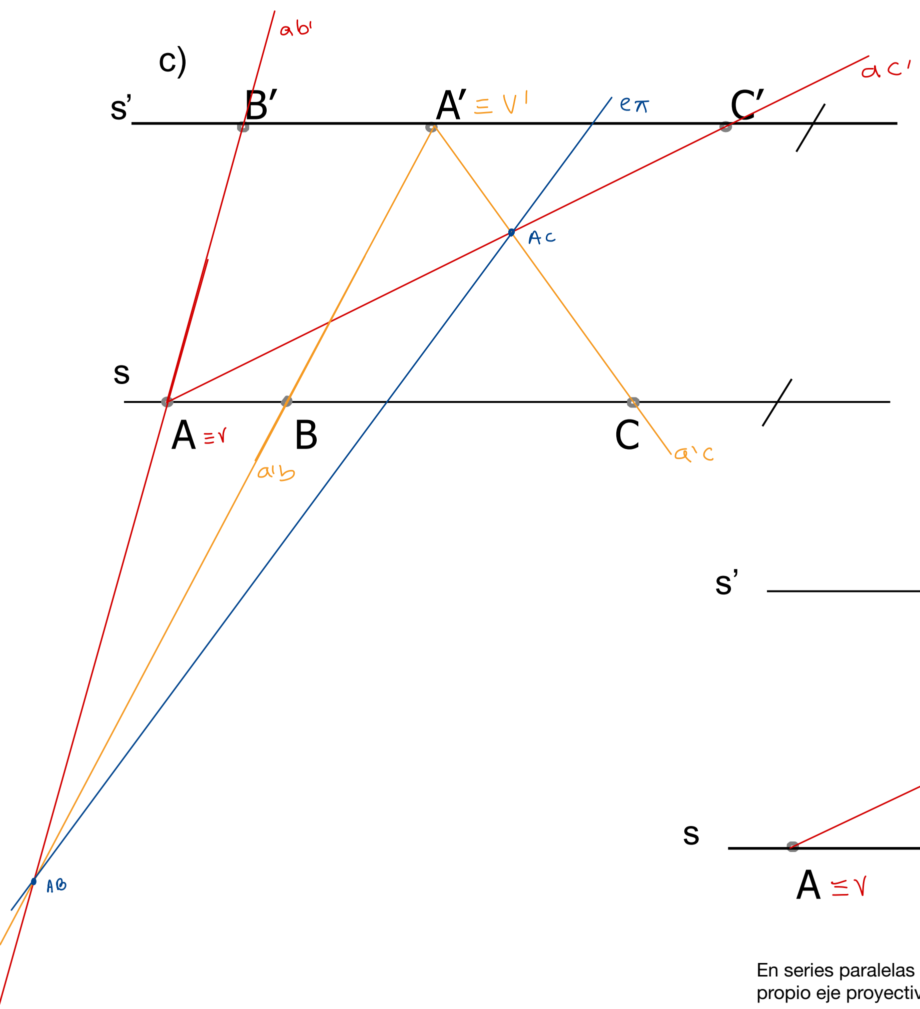
a)



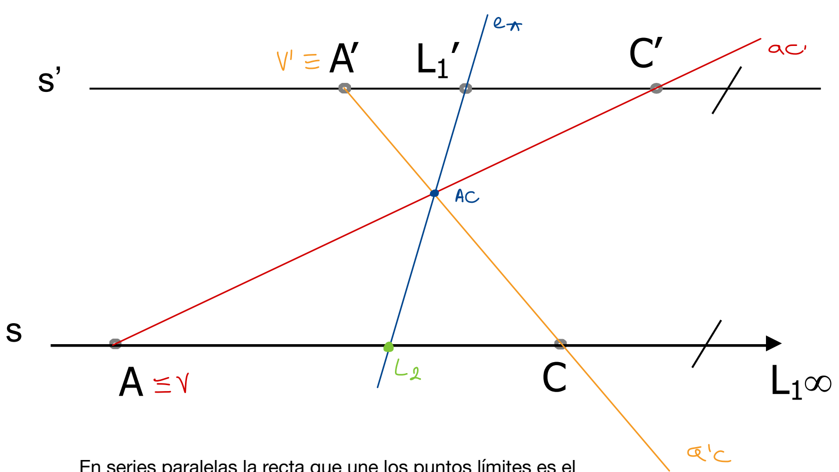

b)




c)




d)




En series paralelas la recta que une los puntos límites es el propio eje proyectivo

E.T.S.I. AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

etsiae UPM

**Expresión Gráfica** **Cuaderno de prácticas – Curso 2021-2022**

| | |
|---|---|
| 1er Apellido | |
| 2º Apellido | |
| Nombre | |

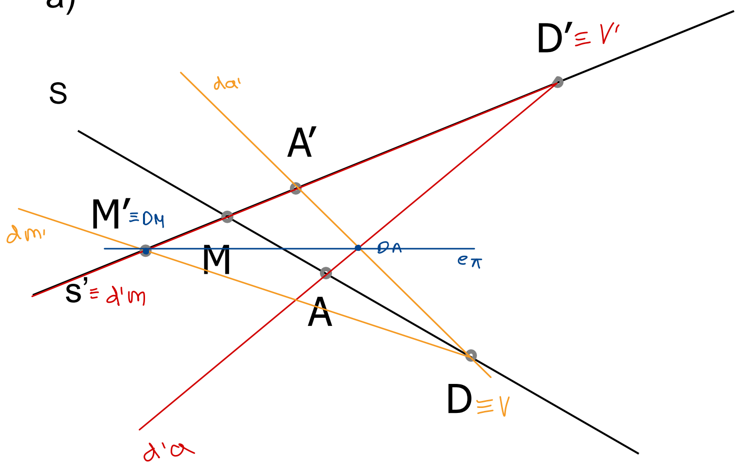
**NOTA**

**GP-16** **G. Proyectiva**

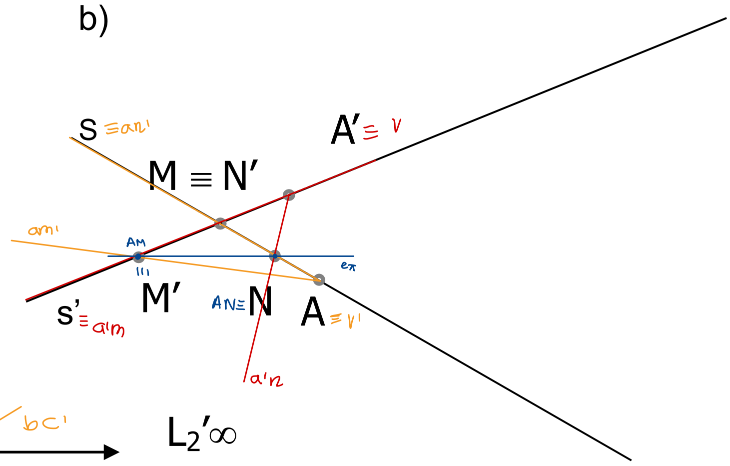
El ejercicio debe ir acompañado de una **Explicación Razonada** en la que se exponga de forma breve y concisa los conceptos teóricos en los que se fundamenta la resolución del problema. Una **Figura de Análisis** puede ayudar a reforzar los conceptos expuestos.

**1.- Determinar el eje proyectivo. Notación y esquema de explicación razonada.**

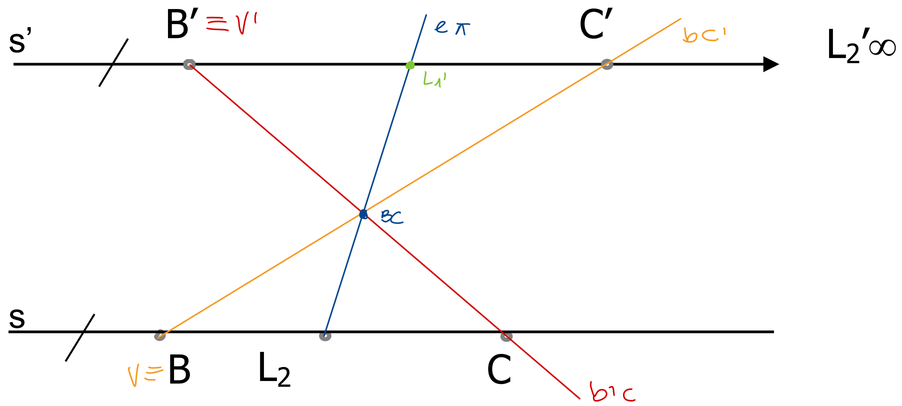
a)



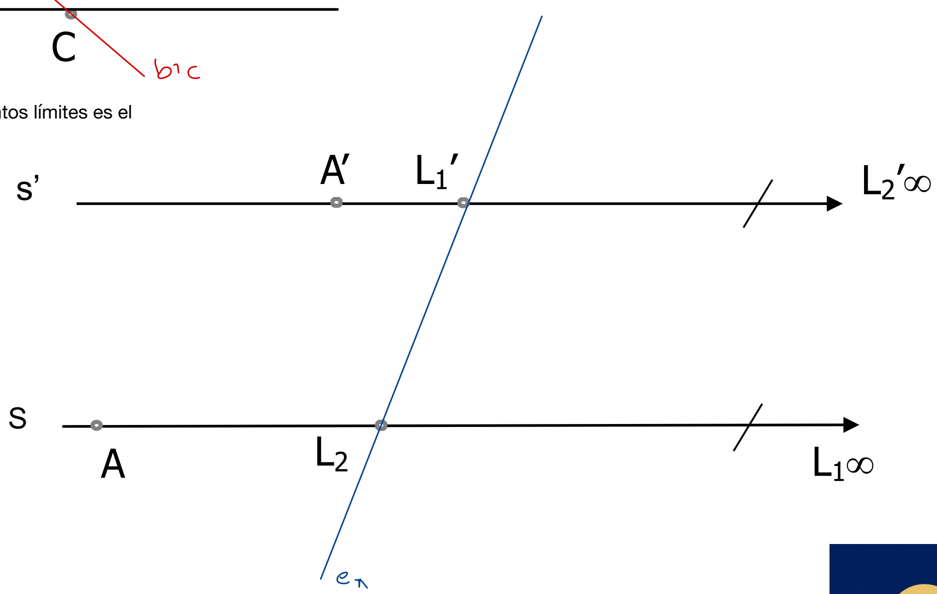

b)




c)




En series paralelas la recta que une los puntos límites es el propio eje proyectivo




En series paralelas la recta que une los puntos límites es el propio eje proyectivo

E.T.S.I. AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

**Expresión Gráfica** **Cuaderno de prácticas – Curso 2021-2022**

| | |
|---|---|
| 1er Apellido | |
| 2º Apellido | |
| Nombre | |

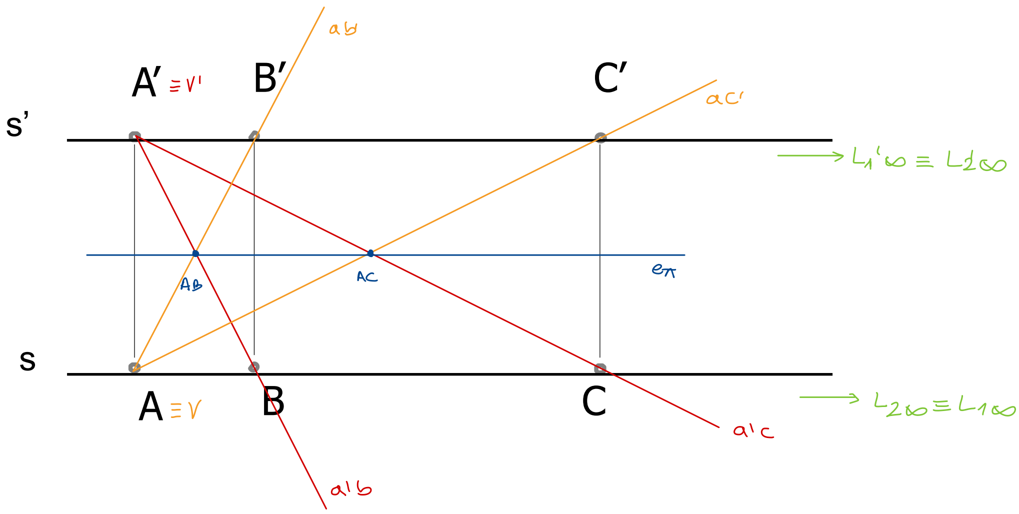
**NOTA**

**GP-17** | **G. Proyectiva**

El ejercicio debe ir acompañado de una **Explicación Razonada** en la que se exponga de forma breve y concisa los conceptos teóricos en los que se fundamenta la resolución del problema. Una **Figura de Análisis** puede ayudar a reforzar los conceptos expuestos.

**1.- Calcular los puntos límite en las proyectividades siguientes. En esquema y en notación indicar las formas perspectivas intermedias.**

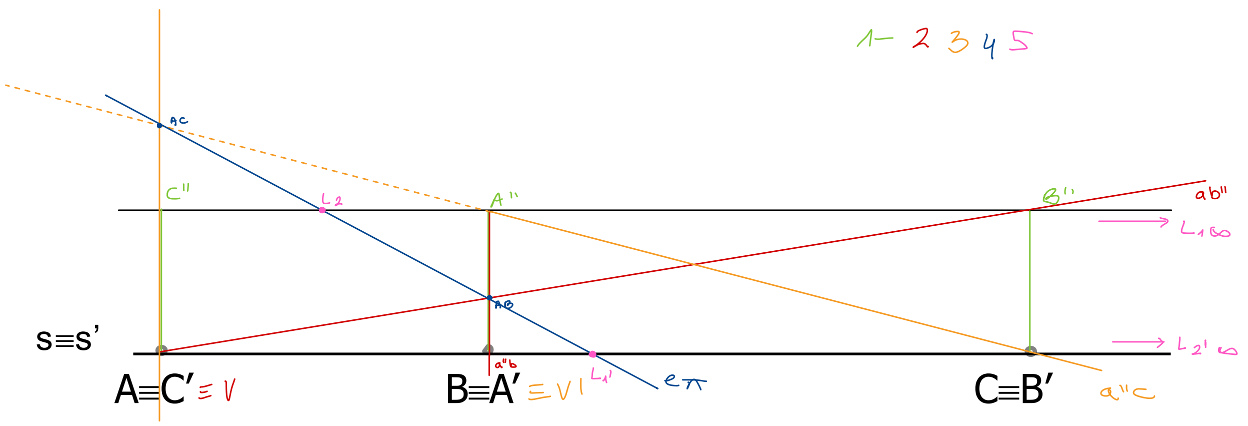
a)




Los puntos límites son los homólogos de los puntos límites de las series

La intersección de el eje proyectivo con dos **series paralelas** nos permite hallar los homólogos de los puntos impropios, en este caso, como el eje proyectivo intersecciona en el infinito, los homólogos de los puntos límites también son impropios (están en el infinito).

b)



E.T.S.I. AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

**GP-18** | **G. Proyectiva**

**Expresión Gráfica** **Cuaderno de prácticas – Curso 2021-2022**

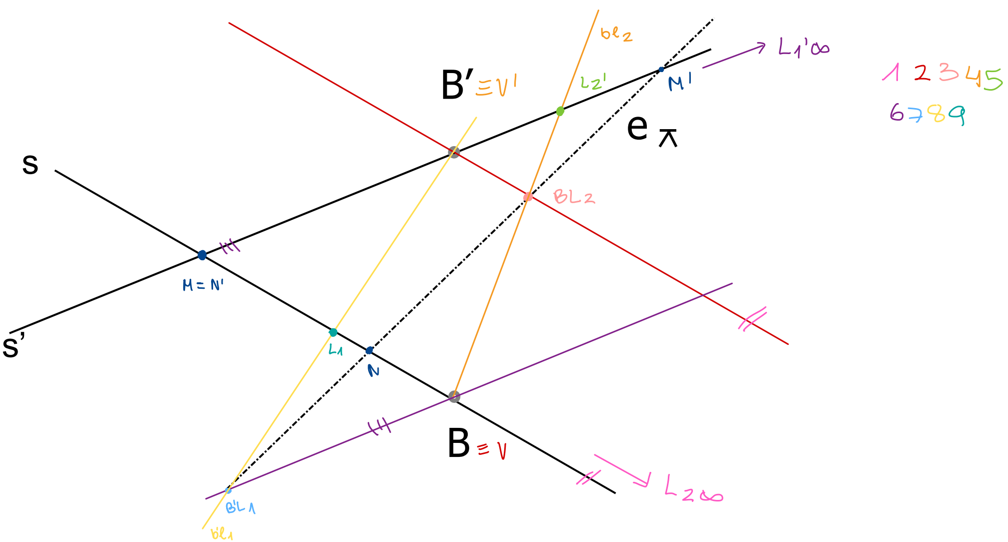
| | |
|---|---|
| 1er Apellido | |
| 2º Apellido | |
| Nombre | |

**NOTA**

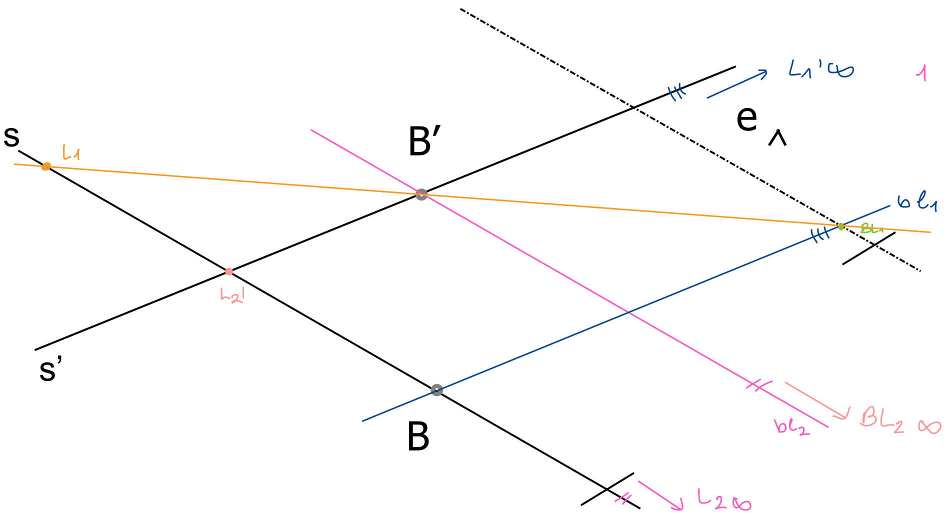
El ejercicio debe ir acompañado de una **Explicación Razonada** en la que se exponga de forma breve y concisa los conceptos teóricos en los que se fundamenta la resolución del problema. Una **Figura de Análisis** puede ayudar a reforzar los conceptos expuestos.

**1.- Dado el eje proyectivo y la pareja B-B', determinar los puntos límite. Notación y esquema de explicación razonada**

a)




b)



E.T.S.I. AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Expresión Gráfica PEI-1: 12/04/23

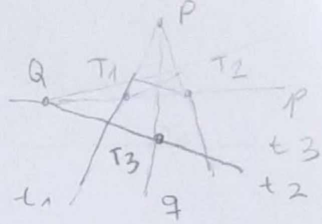
| | |
|---|---|
| 1er Apellido | |
| 2º Apellido | |
| Nombre | |

**NOTA**

## G. Proyectiva

El ejercicio debe ir acompañado de una **Explicación Razonada** en la que se exponga de forma breve y concisa los conceptos teóricos en los que se fundamenta la resolución del problema. Una **Figura de Análisis** puede ayudar a reforzar los conceptos expuestos.

**GP2.-** Una cónica es tangente al trilátero isósceles de la figura en los puntos $T_1$ y $T_2$. Determinar las intersecciones $I_1$ e $I_2$ de la recta **r** con la cónica. (7 puntos)



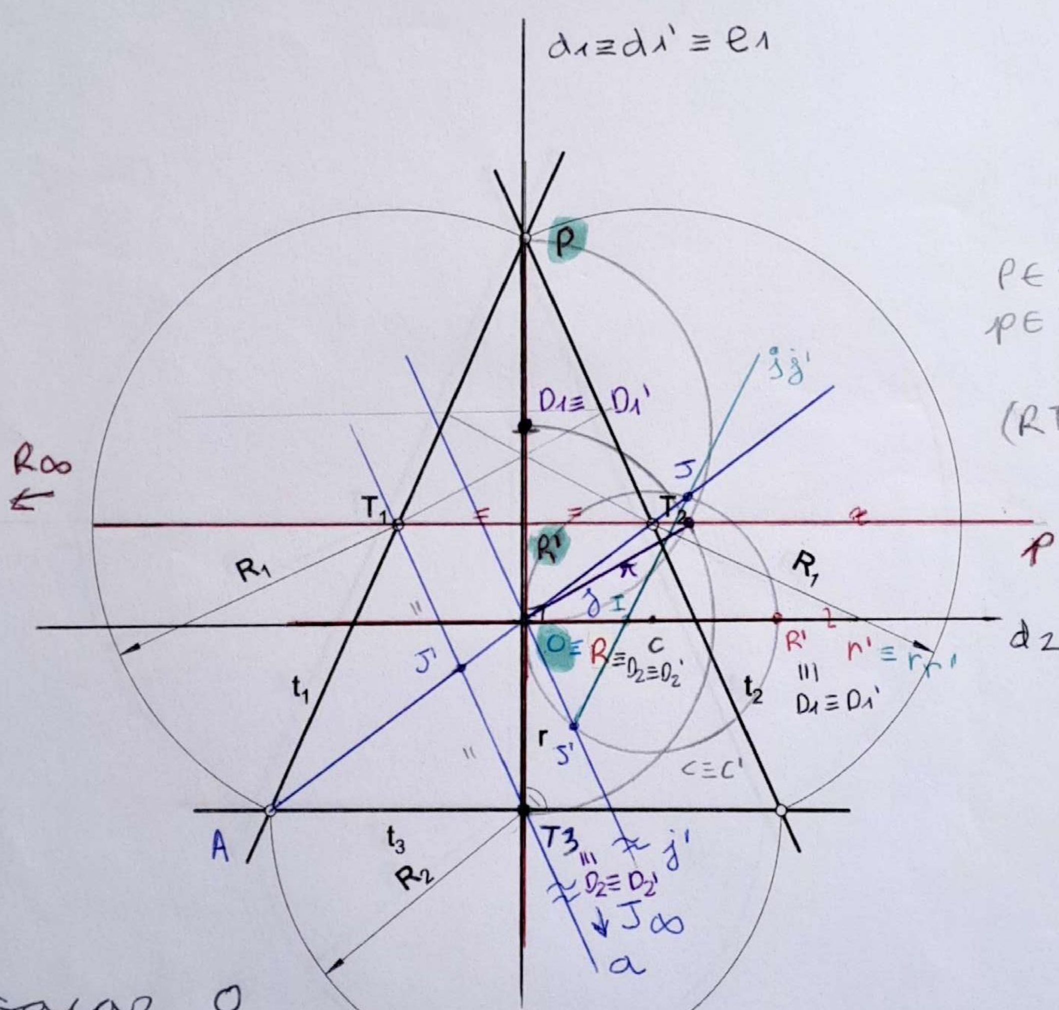

$T_3 \in q$

$t_3 \in Q$

$P \in t_1$ $P \in t_2$

$p \in T_1$ $p \in T_2$

$(R R' T_1 T_2) = -1$




con sacar O
sabes que la otra

Explicación geométrica razonada (3 puntos). Procure cuidar la caligrafía.

intersección de la recta ~~R~~ r con la cónica está en el simétrico de T3'

E.T.S.I. AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Expresión Gráfica PEI-1: 18/03/19

| | |
|---|---|
| 1er Apellido | |
| 2º Apellido | |
| Nombre | |

**NOTA**

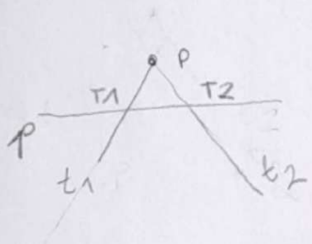
## G. Proyectiva

El ejercicio debe ir acompañado de **Explicación Razonada** en la que exponga de forma breve y concisa los conceptos teóricos en los que se fundamenta la resolución del problema. Una **Figura de Análisis** puede ayudar a reforzar los conceptos expuestos.



**GP2.-** Una cónica está definida por tres tangentes, **t**$_1$, **t**$_2$ y **t**$_3$, un polo **P** y su polar **p**$_P$.
Determinar:

a) los tres puntos de tangencia a la cónica, **T**$_1$, **T**$_2$ y **T**$_3$. (3 puntos)
b) la polar **q** del punto **Q**. (2 puntos)
c) El centro **O** de la cónica. (2 puntos)

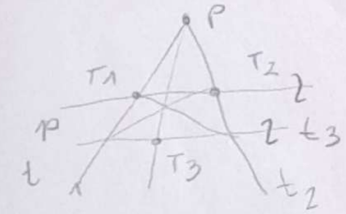


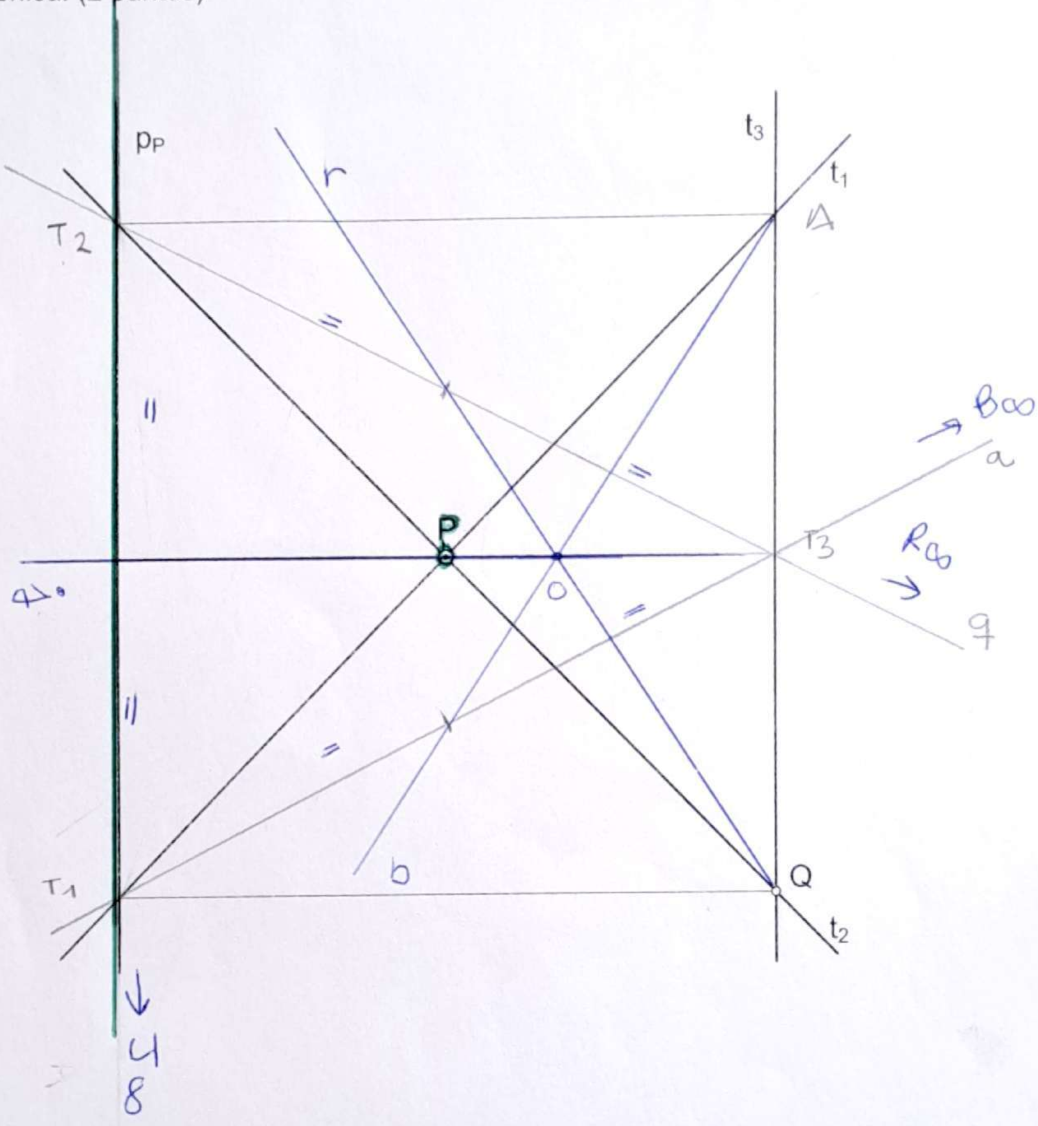

$P \in t_2 \quad P \in t_1$

$p \in T_2 \quad p \in T_1$

$Q \in t_2 \quad Q \in t_3$

$q \in T_2 \quad q \in T_3$




Explicación geométrica razonada (3 puntos). Procure cuidar la caligrafía.

El polo P pertenece a las polares t1 y t2, por tanto p pertenece a los elementos conjugados T1 y T2.
La polar p es la base de una involución de los puntos dobles T1 y T2 cuya relación armónica se cumple para el polo T3 y su polar t3.
El polo Q pertenece a las polares t1 y t3, por tanto su polar, q pertenece a los elementos conjugados T2 y T3.
Para hallar el centro de la cónica obtenemos las polares de los polos impropios B∞, R∞ ...

E.T.S.I. AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

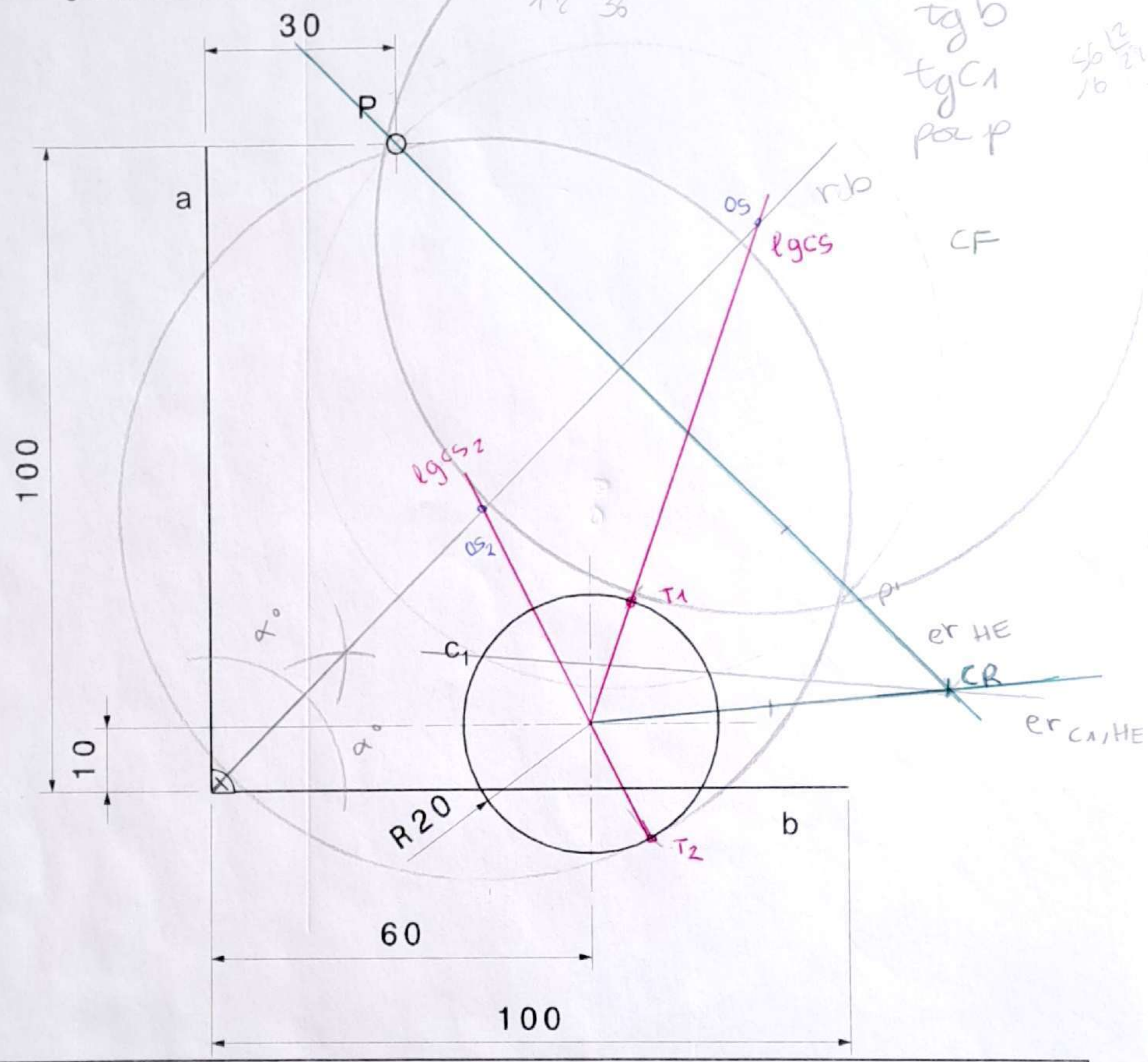
Expresión Gráfica PEI-1: 27/04/20

| | |
|---|---|
| 1er Apellido | |
| 2º Apellido | |
| Nombre | |

**NOTA**

# G. Métrica

**GM.**- Determinar la circunferencia $c_s$ que corte a las rectas **a** y **b** con el mismo ángulo, pase por el punto **P** y sea tangente a la circunferencia $c_1$. (5 puntos)
Explicación geométrica razonada (5 puntos)




**Explicación Geométrica Razonada**

Para que las cs corten a a y b con el mismo ángulo sus centros habrán de estar en la bisectriz de las rectas.

Al pasar por P, se define un haz elíptico de forma que P y su simétrico son los puntos fundamentales del haz, cuya rb es la bisectriz y el er la recta que los une.

De esta forma se llega al PFT y se hallan los ptos. de tg T1 y T2 sobre C1, que definen los lugares geométricos de los centros de solución.

E.T.S.I. AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Expresión Gráfica PEI-2: 18/05/20

| | |
|---|---|
| 1er Apellido | |
| 2º Apellido | |
| Nombre | |

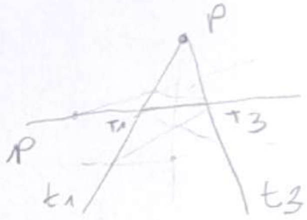
**NOTA**

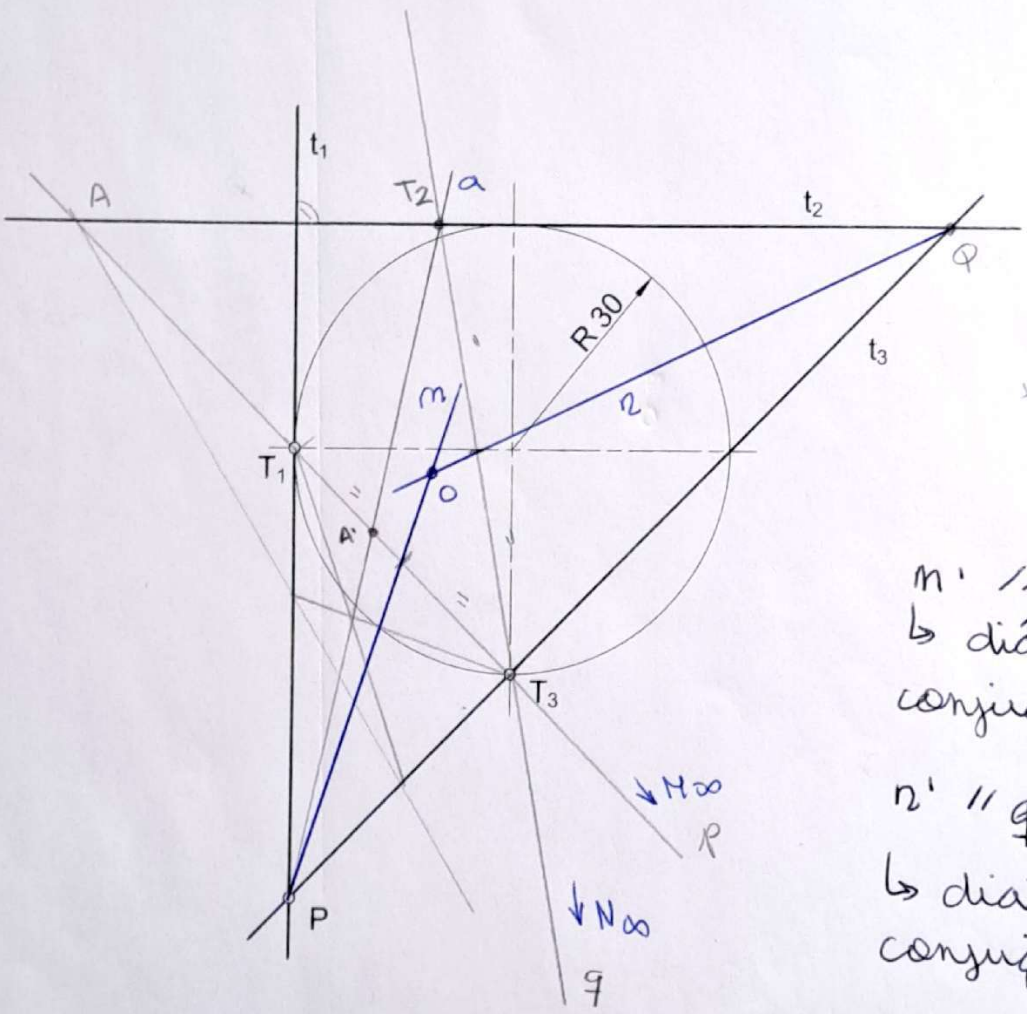
# G. Proyectiva

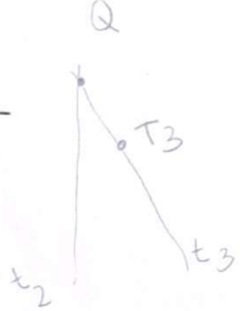
El ejercicio debe ir acompañado de una **Explicación Razonada** en la que se exponga de forma breve y concisa los conceptos teóricos en los que se fundamenta la resolución del problema. Una **Figura de Análisis** puede ayudar a reforzar los conceptos expuestos.

**GP.-** Las rectas $t_1$, $t_2$ y $t_3$ son tangentes a una cónica, y $T_1$ y $T_3$ son dos puntos de contacto.
Nota: La circunferencia solo sirve para el trazado del enunciado gráfico del ejercicio.
Se pide:

a) La polar **p** del punto **P**. (1 punto)
b) El punto de tangencia $T_2$ de $t_2$. (2 puntos)
c) El centro **O** de la cónica. (2 puntos)




m' // p por O
↳ diámetro conjugado

n' // q por O
↳ diámetro conjugado

c) Por P y B pasan dos diámetros m y n, cuyos polos son las direcciones de las polares p y b. La intersección de los diámetros determina el centro de la cónica O.

Explicación razonada (5 puntos). Procure cuidar la caligrafía.

a) El polo P pertenece a las polares $t_1$, $t_3$, por tanto p ∈ a los elementos autoconjugados $T_1$ y $T_3$.

b) La polar p es la base de una involución de los ptos. dobles $T_1$ y $T_3$ tal que $(AA'T_1T_3) = -1$, el conjugado armónico de A es un punto de paso de a que contiene a $T_2$.