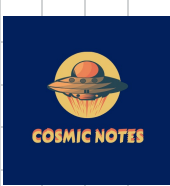


MATES II



1- Topología usual en \mathbb{R}^n

Def: espacio vectorial en \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}; i=1, \dots, n \}$$

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$: espacio vectorial sobre \mathbb{R}
 suma
- $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: espacio vectorial euclideo
 producto
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$: espacio normado
 norma

\mathbb{R}^n tiene una estructura de espacio afín (asociación entre puntos y vectores).

1) $P, Q \rightarrow \vec{PQ} = \vec{v}$

2) $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} = \vec{w}$

- (\mathbb{R}^n, d) : espacio métrico
 distancia

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

- PROPIEDADES
1. $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$
 2. $d(\vec{x}, \vec{x}) = 0$
 3. $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$



DESIGUALDAD TRIANGULAR

2. Bolas en \mathbb{R}^n

Bola abierta de centro $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$

$$\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n); \vec{a} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

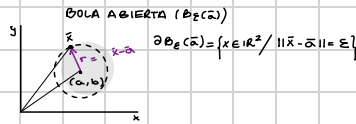
$$B_r(\vec{a}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / \|\vec{x} - \vec{a}\| < r \}$$

$n=1$ \mathbb{R}

$$\vec{x}_1 = \vec{x} \quad \vec{a}_1 = \vec{a} \quad |(x-a)| < r = (a-r, a+r)$$

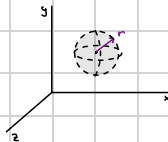
$n=2$ \mathbb{R}^2

$$(x_1, x_2) = (x, y) \quad (a_1, a_2) = (a, b) \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$$



$n=3$

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \quad (a_1, a_2, a_3) = (a, b, c) \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r$$



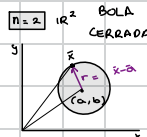
Bola cerrada de centro $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$

$$\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n); \vec{a} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

$$\bar{B}_r(\vec{a}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r \}$$

$n=1$ \mathbb{R}

$$\vec{x}_1 = \vec{x} \quad \vec{a}_1 = \vec{a} \quad |(x-a)| \leq r = [a-r, a+r]$$



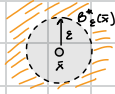
se incluyen los bordes

$$\partial \bar{B}_E(\vec{a}) = \partial B_E(\vec{a})$$



Bola reducida

$$B_r^*(\bar{x}) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \| \bar{x} - \bar{a} \| < r \}$$



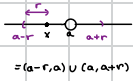
$$\partial B_r^*(\bar{x}) = \partial B_r(\bar{x}) \cup \{ \bar{x} \}$$

$$\text{Ext } B_r^*(\bar{x}) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \| \bar{x} - \bar{a} \| > r \} = \text{Ext } B_r(\bar{x}) = \text{Ext } B_r(\bar{x})$$

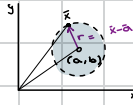
$$B_r^0(\bar{x}) = B_r(\bar{x})$$

$$B_r^{0*}(\bar{x}) = B_r^*(\bar{x})$$

$n=1$ \mathbb{R}



$n=2$ \mathbb{R}^2



No se incluye el centro ni la borde

Entorno



Def. $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice acotado si $\exists R > 0 \mid A \subset B_R(\bar{0})$ Es decir, un conjunto se considera acotado si se puede contener dentro de una bola finita



Ej. $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \}$ No acotado

EJEMPLO 1.2

Entorno del infinito : $B_R^c(\bar{0}) = \mathbb{R}^n \setminus B_R(\bar{0}) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \| \bar{x} \| > R \}$

Complementario de A : $A^c = \{ \bar{x} \mid \bar{x} \notin A \}$; $A \cup A^c = \mathbb{R}^n$

Exclusión de conjunto : $A \setminus B = A - B = \{ x \in A, x \notin B \}$

3. Tipos de conjuntos

ABIERTO : $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto si en cada uno de sus puntos se puede centrar una bola abierta contenida en A

$$\forall \bar{x} \in A \exists r > 0 \mid B_r(r) \subset A$$



CERRADO : $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si A^c (su complementario) es abierto



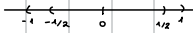
$$\{ |x - a| < R \} = (-\infty, a - R) \cup (a + R, \infty)$$

Propiedades $\left\{ \begin{array}{l} \text{La unión de abiertos es un abierto} \\ \text{La intersección finita de abiertos es un abierto} \end{array} \right.$



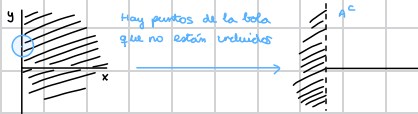
Ej.: $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$; $n \in \mathbb{N}$

$A_n = \{0\} = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^c = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



La unión infinita de abiertos puede ser un cerrado.

Ej. 2: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} = A$ CERRADO



Los únicos conjuntos cerrados y abiertos a la vez son \mathbb{R}^n y \emptyset .

4. Clasificación de los puntos de \mathbb{R}^n asociada a $A \subset \mathbb{R}^n$

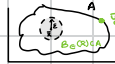
INTERIOR: \bar{x} es interior de A si $\exists \epsilon > 0 \mid B_\epsilon(\bar{x}) \subset A$

Nomenclatura: $A^\circ = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} \text{ es interior}\}$



ADHERENCIA si $\forall \epsilon > 0 \mid B_\epsilon(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$

(cuando la bola intersecciona al conjunto)



Cuanto \bar{x} como \bar{y} son puntos de adherencia

Nomenclatura: cierre de A : $\bar{A} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} \text{ es un punto de adherencia}\}$

ACUMULACIÓN: $\forall \epsilon > 0 \mid B_\epsilon(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$

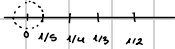
Nomenclatura: $A' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} \text{ es un punto de acumulación}\}$

B (conj. que incluye al punto A y al cto A)

si haces una bola reducida alrededor de c

(es decir, quitando c) no hay ningún punto que pertenezca al cto. \rightarrow no sería un punto de acumulación

$A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$



El 0 es un punto de acumulación porque alrededor de él hay infinitos puntos pertenecientes al conjunto, pero si haces una bola reducida alrededor de él (excluyendo por tanto el 0) si haces la intersección entre A y A' (siendo A' el conjunto de acumulación) no hay ningún punto en común, la intersección sería el conjunto vacío.

FRONTERA. si $\forall \epsilon > 0 \mid B_\epsilon(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\epsilon(\bar{x}) \cap A^c \neq \emptyset$

Un punto frontera tiene puntos que pertenecen al conjunto y puntos que no pertenecen a este para cualquier ϵ



\bar{y} sería un punto de frontera

\bar{z} no lo sería porque sólo se cumple con una de las condiciones

Nomenclatura: $\partial A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} \text{ es un punto de frontera de } A\}$



EXTERIOR: $\exists \varepsilon > 0 / B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A = \emptyset$

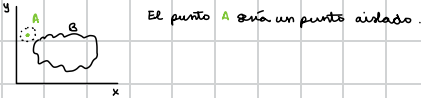
Si centras una bola alrededor del punto, no intersecciona al conjunto



Nomenclatura: $\text{Ext}A = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{x} \text{ es un punto exterior a } A \}$

AISLADO: si $\exists \varepsilon > 0 / B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A = \{ \bar{x} \}$

Un punto aislado es aquel, que si centras una bola de radio épsilon en el, el único punto perteneciente del conjunto es el mismo punto



El punto A es un punto aislado.

TAREA:

Hallar $A^\circ, \bar{A}, A', A_{\text{ext}}, \partial A$

para $A = \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{Z}; A = [0, 1) \cup \{2\}$

Ejercicios 1.2, 1.3, 1.4
↑
final capítulo

1º Ejercicio: hallar el interior A° , la adherencia \bar{A} , la acumulación A' , el exterior $\text{Ext}A$ y la frontera ∂A , para:

a) $A = \mathbb{Q}$

Los n.º racionales presentan huecos correspondientes a los irracionales



A° : puntos que si realizas una bola abierta todos los puntos de la bola pertenecen al cto.

↳ No hay ningún punto interior ya que, cualquier bola que realices siempre va a tener huecos $\rightarrow A^\circ = \emptyset$

\bar{x} es interior si $\exists \varepsilon > 0 / B_\varepsilon(\bar{x}) \subset A$

\bar{A} : puntos que si realizas una bola abierta, esta intersecciona el cto.

↳ la adherencia son todo \mathbb{R} , ya que en cada punto del conjunto se puede crear una bola que interseccione con el conjunto. $\rightarrow \bar{A} = \mathbb{R}$

\bar{x} es pt. de adherencia si $\forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$

A' : un punto de acumulación es aquel, que si creas una bola reducida alrededor del punto, entonces existe algún punto perteneciente al conjunto.

un cto. es denso en \mathbb{R}^n si $\bar{A} = \mathbb{R}^n$

↳ todo punto perteneciente al cto. de los racionales tiene muy cerca un racional y un irracional, por tanto siempre que hagas una bola reducida vas a tener algún punto del cto. denso $\rightarrow A' = \mathbb{R}$

\bar{x} es pt. de acumulación si $\forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$

$\text{Ext}A$ un punto exterior es aquel que si realizas una bola abierta no intersecciona al conjunto.

↳ no existen puntos exteriores por la misma razón, ya que si realizas una bola abierta siempre encuentras un punto que interseccione con el cto. $\rightarrow \text{Ext}A = \emptyset$

\bar{x} es pt. de frontera si $\forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A^c \neq \emptyset$

∂A : la frontera tiene puntos que pertenecen al conjunto y puntos que no pertenecen

↳ la frontera son los n.º reales, ya que para cada bola siempre hay puntos que pertenecen a A (los racionales) y puntos que no pertenecen (los irracionales). $\rightarrow \partial A = \mathbb{R}$

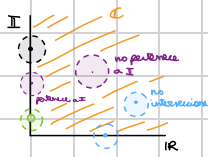
\bar{x} es pt. exterior si $\exists \varepsilon > 0 / B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A = \emptyset$

\bar{x} es pt. aislado si $\exists \varepsilon > 0 / B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A = \{ \bar{x} \} \neq \emptyset$

Aisl A:



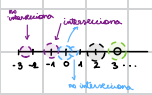
b) $A = \mathbb{I}$



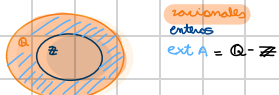
$\mathbb{I} = \text{Ext } \mathbb{I}$
 $\mathbb{I} = \partial \mathbb{I} = \mathbb{I}' = \mathbb{R}$

- A° : puntos que si realizas una bola abierta todos los puntos de la bola pertenecen al cto.
 \hookrightarrow si haces una bola abierta, dentro de ella hay puntos que no pertenecen al conjunto. $\rightarrow A^\circ = \emptyset$
- \bar{A} : puntos que si realizas una bola abierta, esta intersecciona el cto.
 \hookrightarrow solo pertenece al cto. los puntos del propio conjunto. si te sales de el, no intersecciona con nada $\rightarrow \bar{A} = \mathbb{I}$
- A' : un punto de acumulacion es aquel, que si creas una bola reducida alrededor del punto, entonces existe algun punto perteneciente al conjunto.
 \hookrightarrow si creas una bola reducida en \mathbb{I} justo quitas el punto que pertenecia al cto. \rightarrow no hay ningun punto de acumulacion en $\mathbb{I} \rightarrow A' = \emptyset$
- ext. A: un punto exterior es aquel que si realizas una bola abierta no intersecciona al conjunto.
 \hookrightarrow si creas una bola en un punto de \mathbb{I} intersecciona al cto. si lo haces en \mathbb{R} no intersecciona, si lo haces en $\mathbb{C} - \mathbb{I}$ tampoco $\rightarrow \text{ext. } A = \mathbb{C} - \mathbb{I}$
- ∂A : la frontera tiene puntos que pertenecen al conjunto y puntos que no pertenecen.
 \hookrightarrow por tanto para tener puntos que pertenecan y puntos que no, se deberia trazar la bola en el eje imaginario $\rightarrow \partial A = \mathbb{I}$

c) $A = \mathbb{Z}$

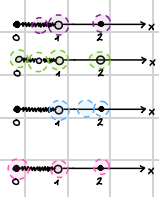


- A° : puntos que si realizas una bola abierta todos los puntos de la bola pertenecen al cto.
 \hookrightarrow si haces una bola abierta, dentro de ella hay puntos que no pertenecen al conjunto. $\rightarrow A^\circ = \emptyset$
- \bar{A} : puntos que si realizas una bola abierta, esta intersecciona el cto.
 \hookrightarrow solo interseccionan el cto. las bolas que se realizan con centro en los \mathbb{N} enteros \rightarrow la adherencia del cto. es el mismo cto. $A \rightarrow \bar{A} = A$
- A' : un punto de acumulacion es aquel, que si creas una bola reducida alrededor del punto, entonces existe algun punto perteneciente al conjunto.
 \hookrightarrow si usas bolas reducidas alrededor de los puntos pertenecientes al cto. (para cualquier radio) entonces no existen puntos pertenecientes al cto. \rightarrow el cto. de acumulacion es el espacio vacio $\rightarrow A' = \emptyset$
- ext. A: un punto exterior es aquel que si realizas una bola abierta no intersecciona al conjunto.
 \hookrightarrow si usas bolas reducidas que no contengan a los puntos pertenecientes al conjunto \rightarrow encuentras puntos exteriores, por tanto, el conjunto exterior son todos los racionales menos los enteros $\rightarrow \text{ext. } A = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$



- ∂A : la frontera tiene puntos que pertenecen al conjunto y puntos que no pertenecen.
 \hookrightarrow toda bola abierta que realizamos centrada en los puntos que pertenecan al cto. tiene puntos que pertenecen y puntos que no. si la realizamos centrada en un punto que no pertenece al cto. no podemos asegurar que para cualquier radio la bola tendria puntos que pertenecan \rightarrow la frontera del cto. A es el propio cto. $A \rightarrow \partial A = A$

d) $A = [0, 1) \cup \{2\}$



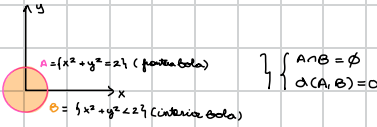
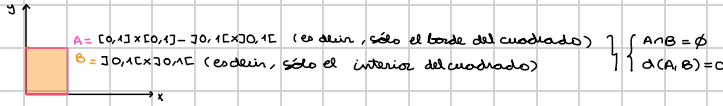
- $A^\circ = \emptyset$ No hay ninguna bola abierta que solo incluya puntos del cto.
- $\bar{A} = A$ en todo el cto. se pueden hacer bolas abiertas que interseccionen a A
- $A' = [0, 1]$ para todos los puntos comprendidos entre el 0 y el 1 se cumple que si realizas una bola reducida alrededor de ellos existe algun punto perteneciente a A. Esto en 2, no se cumple para cualquier radio.
- ext. A = $\mathbb{R} - [0, 1] \cup \{2\}$ solo se puede hacer una bola abierta que no contenga a ningun punto del cto. entre 1 y 2, excluyendo estos.
- $\partial A = [0, 1, 2]$ como deciamos en el apartado anterior, si haces una bola abierta alrededor del 1 y el 2 la bola pedira puntos pertenecientes y no pertenecientes al cto., lo mismo ocurre con el 0.

1.2 Dados $A, B \in \mathbb{R}^2$, se llama distancia de A a B al número $d(A, B) = \inf \{d(a, b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$. Determinar dos conjuntos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$ y $d(A, B) = 0$.

1.3 Sean dados los puntos $x_1, x_2, \dots, x_n, a \in \mathbb{R}^2$ (todos distintos). 1º) Hallar una bola de centro en a que no contenga a ninguno de los x_i . 2º) Si hubiera infinitos puntos x_i , ¿el problema tendría siempre solución?

1.2 Datos:
$$\left\{ \begin{array}{l} d(A, B) = \inf \{d(a, b) / a \in A \text{ y } b \in B\} \\ A, B \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

Determinar dos ejes A y B tales que $A \cap B = \emptyset$ y $d(A, B) = 0$



1.3 Datos $\left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n \text{ (todos distintos)} \\ a \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$

1.3.1 Hallar una bola de radio a que no contenga a ningún x_i

una bola abierta de radio a se define como $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 / d(x, a) < r\}$

la distancia entre a y un punto x_i es: $d(x, x_i) = \|x - x_i\|$

Para encontrar una bola abierta que no contenga a ningún x_i la distancia entre x (el centro de la bola) y x_i (un punto del conjunto) debe de ser mayor al radio a .



$d(x, x_i) > a \quad \text{¿} d(a, x_i) > 0 \text{?}$

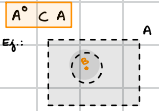
1.3.2 Si hubiera infinitos puntos pertenecientes al conjunto, ¿el problema tendría solución?

Depende, si los puntos "se acumulan" en $a \rightarrow$ la distancia entre el radio de la bola y los puntos sería aprox. 0 y no podrías encontrar una bola que no incluya puntos del eje (esto ocurre en el eje de los racionales).

sin embargo, si se sigue manteniendo la condición de que la distancia entre x_i y x es mayor al radio a , podrias encontrar una bola.

CONCLUSIONES

Los puntos interiores son necesariamente puntos del ipto. $\left\{ \begin{matrix} B_\epsilon(x) \subset A \\ \{x\} \subset B_\epsilon(x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \in A^\circ$



si haces una bola abierta en cualquier punto del interior de A \rightarrow esta contiene únicamente puntos del ipto.

Los puntos interiores son de adherencia: $B_\epsilon(x) \subset A \Rightarrow B_\epsilon(x) \cap A = B_\epsilon(x) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$
 \hookrightarrow si se realiza una bola abierta alrededor de un punto que sea interior a A \rightarrow la bola intersecciona con algún punto de A.

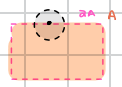
Los puntos de A son de adherencia \rightarrow ya que el interior del ipto pertenece a A y este es de adherencia \rightarrow los puntos de A son también de adherencia.

$A^\circ \subset A \subset \bar{A}$

Los puntos de acumulación son de adherencia: $\bar{x} \in A'; B_\epsilon^*(x) \subset B_\epsilon(x) \Rightarrow B_\epsilon^*(x) \cap A \subset B_\epsilon(x) \cap A \Rightarrow \bar{x} \in \bar{A}$

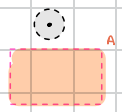
$\neq \emptyset$
 x es pto. de acumulación \rightarrow al estar contenido forma parte de algo más grande y el punto no es el vacío así que el segundo tampoco

Los puntos de adherencia contienen a la frontera

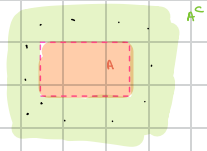


si realizas una bola abierta en la frontera esta intersecciona con el ipto. $\rightarrow \bar{A} \subset \partial A$

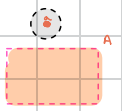
Un punto exterior no está en el cierre (en la adherencia) • El ipto. de puntos exteriores está incluido en el complementario de A ($\text{Ext } A \subset A^c$)



si realizas una bola abierta en el exterior esta no intersecciona con el ipto. $\rightarrow \bar{A} \not\subset \partial A$



un punto aislado es un punto de frontera, y como es de frontera también es de adherencia.



si x pertenece a A (es un punto aislado) \rightarrow si realizas una bola alrededor del tiene puntos del ipto. y puntos que no pertenecen \rightarrow es un punto de frontera \rightarrow es un punto de adherencia.

Conjunto abierto

Conjunto cerrado

- A es abierto si:
 - Todo punto $x \in A$ pertenece a su interior A°
 - $A \subseteq A^\circ$
 - si no contiene a ninguno de los puntos de su frontera
 - $A \cap \partial A = \emptyset$

- A es cerrado si:
 - si el ipto. A es igual a su adherencia.
 - $A = \bar{A}$
 - si contiene a todos sus puntos de acumulación
 - $A' \subset A$
 - cuando la frontera está contenida en A
 - $\partial A \subset A$



$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$$

$$A^\circ = A \quad \bar{A} = \bar{A}$$

abierto cerrado

A° es el mayor abierto en A y siempre está contenido en A

\bar{A} es el menor cerrado que contiene a A

$$\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A = A' \cup \{ \text{puntos frontera} \} = A \cup A' = A \cup \partial A$$

uniones: la unión de dos conjuntos es disjunta si $A \cap B = \emptyset$
 disjuntos: $\bar{A} \not\subset \partial A$ $A' \notin \{ \text{puntos frontera} \}$

Conexión y compacidad

Un conjunto se dice conexo si cualquier partición $A = A_1 \cup A_2$; con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; $A_1 \neq \emptyset$; $A_2 \neq \emptyset$

se tiene que $\bar{A}_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ o $A_1 \cap \bar{A}_2 \neq \emptyset$

Partición: expresión de un conjunto como dos trozos.

Al separarlo en dos trozos (unión disjunta), la intersección de \bar{A}_1 con A_2 ya no es el vacío o $A_1 \cap \bar{A}_2 \neq \emptyset$

Ej. 1: $\mathbb{R} = \underbrace{(-\infty, 0)}_{A_1} \cup \underbrace{[0, \infty)}_{A_2}$ $\left\{ \begin{array}{l} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ \bar{A}_1 = (-\infty, 0] \\ A_1 \cap \bar{A}_2 = \{0\} \neq \emptyset \end{array} \right\}$ se debería probar para todas las particiones \rightarrow no se tiene a utilizar

Ej. 2: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset \\ \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \bar{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{I} \neq \emptyset \end{array} \right\}$

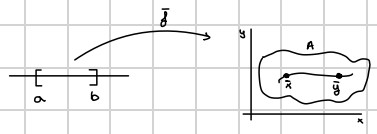
- \mathbb{R}^n es conexo
- los únicos conexos en \mathbb{R} son los intervalos
- si A es conexo $\Rightarrow \bar{A}$ es conexo

¿ES \mathbb{Q} conexo?

$\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2$; $A_1 = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$; $A_2 = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)$; $\bar{A}_1 = (-\infty, \sqrt{2}]$; $\bar{A}_2 = [\sqrt{2}, \infty)$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset \end{array} \right\}$ Al encontrar una partición que no cumple la condición \rightarrow no es conexo

Conexión por arcos

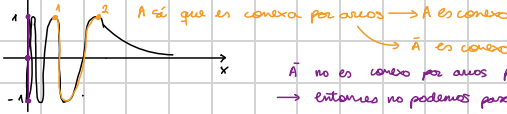
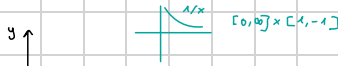
$A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo por arcos si $\forall x, y \in A \exists$ una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $f([a, b]) \subset A$ tal que $f(a) = x$ y $f(b) = y$



X No es conexo por arcos, porque no lo puedes conectar por arcos sin que se salga del conjunto.

Si A es conexo por arcos $\Rightarrow A$ es conexo.

Ej.: $A = \{(x, \sin(1/x)), x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ estudiar si A y \bar{A} son conexos y/o conexos por arcos.



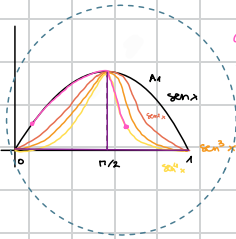
A sí que es conexo por arcos $\rightarrow A$ es conexo
 $\rightarrow \bar{A}$ es conexo

\bar{A} no es conexo por arcos porque $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x) = \nexists \rightarrow$ la función $\sin(1/x)$ no es continua \rightarrow
 \rightarrow entonces no podemos pasar del segmento $\bar{A} \cap A$

Compacidad

Un cto. es compacto si es cerrado y acotado

I.1. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ; A_n = \{(x, \sin^n x), x \in [0, \pi]\}$



Conexo por arcos

A es acotado (se puede contener en una bola abierta)

$\bar{A} = A \cup ([0, \pi] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$

No es compacto

Ejercicios

✓ 1.2 Representar los siguientes conjuntos en \mathbb{R}^2 :

(a) $\left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) : n \in \mathbb{Z} - \{0\}, -1 \leq y \leq 1 \right\}$

(b) $\left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n+1} \right) : n = 1, 2, \dots \right\}$

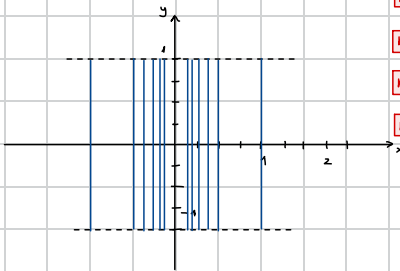
(c) $Y = I \cap X$ donde $I = [-1, 1] \times [1, 2]$ y

$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n : X_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 1 + x^2/n\}$

(d) $C = A \cap B$ donde:

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \geq 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 - y^2 < 0\}$

a) $\left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) : n \in \mathbb{Z} - \{0\}, -1 \leq y \leq 1 \right\}$



$n=1$ $\left\{ \left(1, y \right) : n \in \mathbb{Z} - \{0\}, -1 \leq y \leq 1 \right\}$

$n=2$ $\left\{ \left(1/2, y \right) : n \in \mathbb{Z} - \{0\}, -1 \leq y \leq 1 \right\}$

$n=3$ $\left\{ \left(1/3, y \right) : n \in \mathbb{Z} - \{0\}, -1 \leq y \leq 1 \right\}$

$n=4$ $\left\{ \left(1/4, y \right) : n \in \mathbb{Z} - \{0\}, -1 \leq y \leq 1 \right\}$

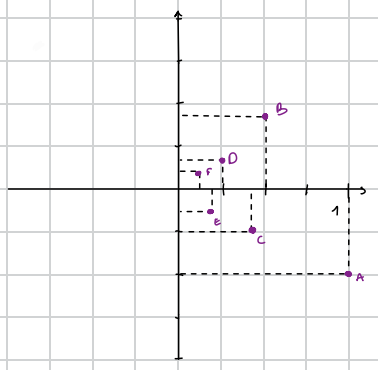
x	y
1	y
$1/2$	y
$1/3$	y



b) $\left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n+1} \right), n=1, 2, \dots \right\}$

$x = 1/n$
 $y = \frac{(-1)^n}{n+1}$

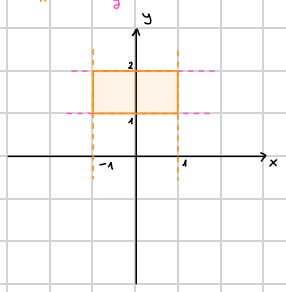
n	x	y	Label
n=1	1	-1/2	A
n=2	1/2	1/3	B
n=3	1/3	-1/4	C
n=4	1/4	1/5	D
...



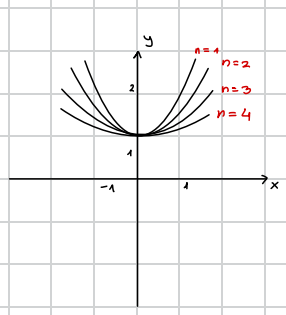
c) $Y = I \cap X$ donde $I = [-1, 1] \times [1, 2]$ y $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n: x_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 1 + x^2/n\}$

1º Representamos I

$I = [-1, 1] \times [1, 2] \rightarrow$ al ser intervalos cerrados incluyen la frontera

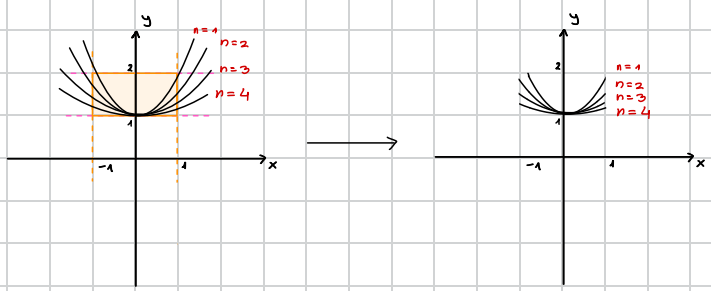


2º Representamos X



x	y
x	$1 + x^2$
x	$1 + \frac{x^2}{2}$
x	$1 + \frac{x^2}{3}$
x	$1 + \frac{x^2}{4}$

3º Unimos ambas gráficas, y como es la intersección \rightarrow nos quedamos con lo común a ambas





d) $C = A \cap B$ donde:

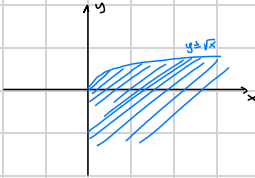
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^4 \geq 0\} \quad y \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 - y^2 < 0\}$$

$$y^4 \leq x^2;$$

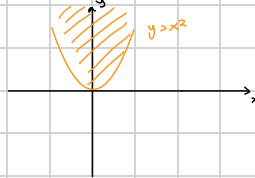
$$y^2 \leq x; y \leq \sqrt{x}$$

$$y > x^2$$

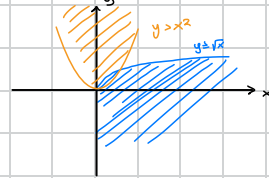
1º Dibujamos A



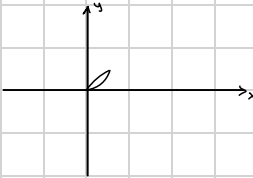
2º Dibujamos B



3º Unimos A y B



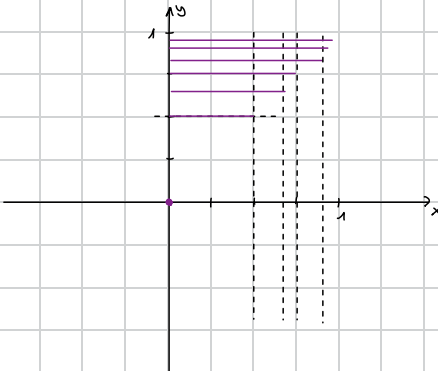
4º Nos quedamos con lo común entre A y B



1.3 Representar los siguientes conjuntos:

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, (x, y) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$
- (c) $\{(x_n, y) \in \mathbb{R}^2 : x_n = -1 + \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}), |y - x_n| < 1\}$

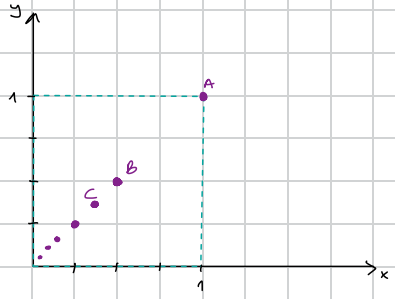
a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$



	x	y
$n=0$	0	0
$n=1$	$[0, 1/2]$	1/2
$n=2$	$[0, 2/3]$	2/3
$n=3$	$[0, 3/4]$	3/4
$n=4$	$[0, 4/5]$	4/5



b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, (x,y) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$

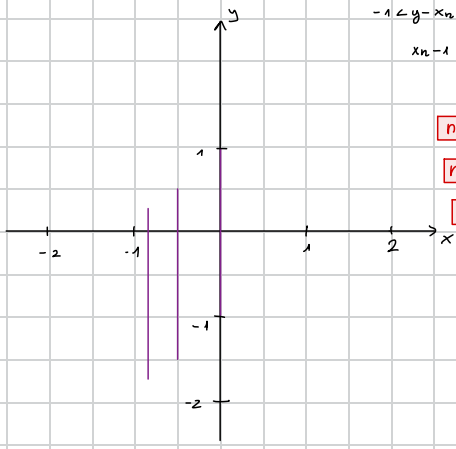


1º Delimitamos el dominio de la x y de la y
 ↳ sin incluir fronteras

2º Tabla de valores

	x	y	
n=1	1	1	A
n=2	1/2	1/2	B
n=3	1/3	1/3	C
⋮	⋮	⋮	

c) $\{(x_n, y) \in \mathbb{R}^2 : x_n = -1 + \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}), |y - x_n| < 1\}$



$$-1 < y - x_n < 1$$

$$x_{n-1} < y < x_{n+1}$$

	x	y
n=1	0	$[-1, 1]$
n=2	-1/2	$[-3/2, 1/2]$
n=3	-2/3	$[-5/3, 2/3]$



SUCESIONES EN \mathbb{R}^p : Sucesión: función cuyo dominio es \mathbb{N}

def: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $n \rightarrow f(n) = x_n$
 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ (término general)

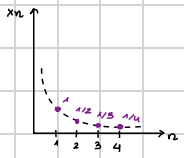
$\mathbb{R} = \mathbb{A}$

Ej: $x_n = \frac{1}{n} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Ej 2: $x_n = r \cdot x_{n-1} = r^2 \cdot x_{n-2} \rightarrow x_n = a \cdot r^{n-1}$
 $x_1 = a$

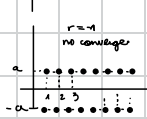
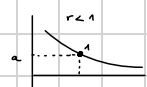
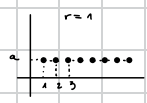
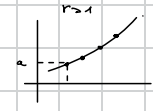
- $0 \notin \mathbb{A}$
- $0 \in \mathbb{A}'$



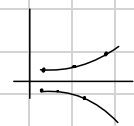
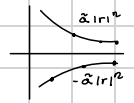
$x_n = a \cdot r^{n-1} = \alpha \cdot r^n$

- ∞ : $r > 1$
- a : $r = 1$
- 0 : $-1 < r < 1$
- \neq : $r = -1$
- \neq : $r < -1$

La sucesión es convergente para: $]-1, 1[$



$\alpha \cdot r^n$
 al ser una función esp tiene esta forma.
 \rightarrow va al ∞ lo divergente

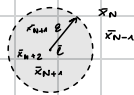


Concepto de límite de una sucesión

def: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite $\bar{c} \in \mathbb{R}^p$ si $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \text{si } n > N \Rightarrow \|x_n - \bar{c}\| < \epsilon$

y se escribe como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{c}$

- Hay un término de la sucesión en $B_{\epsilon}(\bar{c})$
- Hay a lo sumo N términos de la sucesión ext $B_{\epsilon}(\bar{c})$



siguiendo con los ejemplos anteriores:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \text{si } n > N \rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon ; n > \frac{1}{\epsilon} \rightarrow N \geq \frac{1}{\epsilon}$

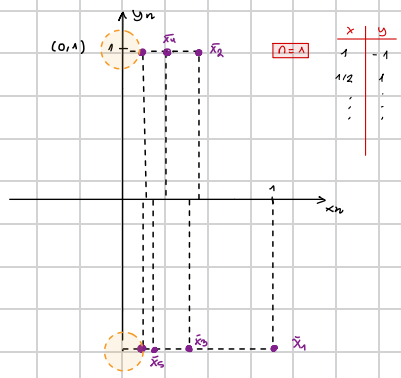
si $\epsilon = 10^{-10}$; $N = 10^{10}$

$x_{\frac{1}{\epsilon}} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \frac{1}{10^{-10+1}} < \frac{1}{10^{-9}}$

se dice que $\{x_n\}$ es convergente si tiene límite $\bar{c} \in \mathbb{R}^p$ y divergente si no lo tiene

otro ejemplo: $x_n = (1/2, (-1)^n) \in \mathbb{R}^2$

Propiedades de los límites en el 2.A.3



No podemos encontrar ningún ϵ para el que todos los términos de la sucesión entren en el. Ya que se alternan entre y positivas y negativas.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq (0, 1)$ NO SE CUMPLE.

Los puntos de acumulación no tienen porque ser el límite del conjunto. Si hay dos puntos de acumulación distintos, eso ya significa que no hay límite. \rightarrow límite de oscilación

$\bar{A} = A \cup A' = A \cup \{(0, 1), (0, -1)\}$

$\|x_n\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \leq \sqrt{2} \rightarrow$ Esta sucesión está acotada \rightarrow tiene al menos un límite de oscilación.



Propiedades de los límites

-El límite si existe es único

-Límite de oscilación: $\bar{\epsilon}$ es límite de oscilación de $\{x_n\}$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \mathbb{E} \in (\mathbb{E})$ que contiene ∞ puntos de la sucesión

límite \rightarrow límite de oscilación
límite \neq límite de oscilación

-Teorema: toda sucesión acotada tiene al menos un límite de oscilación, al que tiene alguna subsecuencia de $\{x_n\}$

$\rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$

$\rightarrow x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots; n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$

¿Las subsecuencias están ordenadas y las sucesiones no tienen porque estarlo?

Hallar los límites de oscilación de $x_n = \left(\cos \left(\frac{1+n^2\pi}{2n} \right), \sin \left(\frac{1+n^2\pi}{2n} \right) \right)$

SUCESIONES EN \mathbb{R}^1

Sucesión de Fibonacci

$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$ $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\ x_1 = 1, x_2 = 1 \\ x_n \rightarrow \infty \end{cases}$

Otra sucesión:

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{13}{3}, \frac{21}{5}, \dots \right\}$

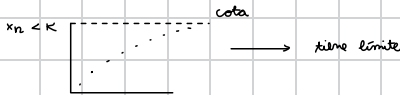
$y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{x_{n-1}} = \frac{\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} + 1}{\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}} = \frac{y_{n-1} + 1}{y_{n-1}}$ PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n-1} + 1}{y_{n-1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1} + 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}} = \frac{l + 1}{l}$
 la llamamos z_n

$l^2 = l + 1 \rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$ \rightarrow razón áurea \rightarrow tasa de crecimiento de la sucesión de Fibonacci
 $l = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ \rightarrow n^2 negativo no tiene sentido si todo el gto. está formado por n^2 positivos.

Axioma de completitud: Toda sucesión (en \mathbb{R}) **monótona** y acotada es convergente.

$\{x_n\}$ es monótona creciente $\rightarrow x_{n+1} \geq x_n$
 decreciente $\rightarrow x_{n+1} \leq x_n$



Ej. comprueba que $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada

$(x_n > x_{n-1}; 2 < x_n < 3)$
 $n \rightarrow \infty \rightarrow x_n \in \mathbb{E}$

$\{x_n\} \in \mathbb{N} = \{2, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \dots\}$

Def: A es numerable si existe una biyección entre \mathbb{N} y A.

$\mathbb{N} \rightarrow A$
 $1 \rightarrow \frac{1}{2}$
 $2 \rightarrow \frac{1}{3}$
 $3 \rightarrow \frac{1}{4}$
 \vdots



Primer argumento de la diagonal de Cantor

1	2	3	4	5	...
1	1/2	1/3	1/4	1/5	
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
...					

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = 1, 1/2, 2, 3, 1/3, 1/4, 2/3, 3/2, \dots$
 $\mathbb{Q} \rightarrow 0, x_1, x_2, x_3, \dots$
 Esto demuestra que los racionales son enumerables.
 Aquí también están contenidos los naturales.

Def.: A es un cto. infinito si existe una biyección entre A y B $\subset A$; $B \neq A$; $B \neq \emptyset$; $\frac{m}{n} = q \in \mathbb{Q}$
 $m+n = \text{cte.}$

Se establece una relación 1 a 1, entre los naturales y los racionales, a cada racional le corresponde un natural, y ocurre así infinitamente.

La diferencia entre los racionales y los irracionales es que los irracionales no son numerables.

Segundo argumento de la diagonal de Cantor

Dem. por reducción a lo absurdo

$x \in (0, 1)$

1 $\rightarrow x_1 = 0.8432632$

2 $\rightarrow x_2 = 0.8432632$

3 $\rightarrow x_3 = 0.15386215$

4 $\rightarrow x_4 = 0.5586$

$(0, 1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \frac{x-1/2}{x(x-1)} = f(x)$

$\{x_n\} \exists x^* = 0.6307 \rightarrow x \in (0, 1) \rightarrow \text{como } (0, 1) \text{ está en biyección con } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R} \text{ no es numerable}$
 $\mathbb{I} \text{ no es numerable}$

Hipótesis del continuo ¿Existe algún cto. entre \mathbb{N} y \mathbb{R} ?

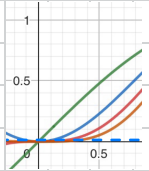
Problemas al capítulo I



1.1 Sea $X_k \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto definido por $X_k = \{(x, \sin^k(x)) / x \in [0, \pi/4]\}$ donde k es un número natural. Sea $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$.
 Obtener el conjunto formado por los puntos de acumulación de Y .
 Determinar razonadamente cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) $Y^a = Y \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0, \pi/4]\}$
- b) $Y^a = Y \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0, \pi/4]\}$
- c) $Y^a = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0, \pi/4]\}$
- d) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas

- f(x) = sen(x) ::
- g(x) = sen²(x) ::
- h(x) = sen³(x) ::
- p(x) = sen⁴(x) ::



1º Buscamos la última posibilidad para el seno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n(x) = 0$$

Por ello, cuando $n \rightarrow \infty$, $\sin^n(x) \rightarrow 0$.

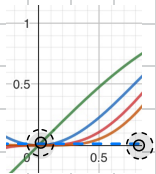
$$u(x) = \sin^{\infty}(x)$$

Esta parte no pertenece al cto. porque nunca se llega a alcanzar.

Pero sí que pertenece a la frontera, ya que si realizamos una bola abierta siempre incluye puntos pertenecientes al cto. y no pertenecientes.

También pertenece al cto. de acumulación, ya que si creamos una bola reducida alrededor del punto, entonces existe algún punto perteneciente al conjunto.

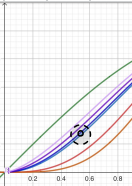
Ahora nos tenemos que preguntar si el 0 y el $\pi/4$ están incluidos como puntos de acumulación. Para ello, realizamos una bola reducida alrededor de ambos puntos y vemos si al hacer la intersección entre Y y el cto. excluyendo el "posible pto. de acumulación" da el cto. vacío.



Para el 0 sí que se cumple \rightarrow es un pto. de acumulación.

Para el $\pi/4$ también se cumple \rightarrow es un pto. de acumulación.

- f(x) = sen(x) ::
- g(x) = sen²(x) ::
- h(x) = sen³(x) ::
- p(x) = sen⁴(x) ::
- s(x) = (sen(x))^{1/2} ::
- q(x) = (sen(x))^{2/3} ::
- r(x) = (sen(x))^{3/4} ::



A su vez, esto ocurre con todo el cto. Y ya que para cualquier punto se cumplirá. Así que, el propio Y pertenece al cto. de acumulación.

Por todo ello Y^a será: $Y \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0, \pi/4]\}$



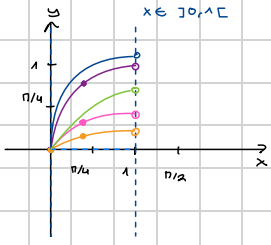
I.2 Sea C el conjunto definido mediante $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, donde

$$C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, y = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right\}$$

Determinar C^* . Sea X el conjunto de los puntos de acumulación de C que no pertenecen a C (es decir, $X = C^* \cap (\mathbb{R}^2 - C)$).

Determinar razonadamente cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) $X = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 0)\}$.
- b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.
- c) $X = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$.
- d) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

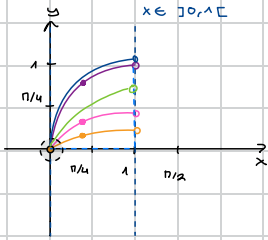


	x	y
$n=1$	$]0, 1[$	$\sin(\pi/2 x)$ ✖
$n=2$	$]0, 1[$	$\frac{\sin(\pi/2 x)}{2}$ ✖
$n=3$	$]0, 1[$	$\frac{\sin(\pi/2 x)}{3}$ ✖
\vdots		
$n \rightarrow \infty$	$]0, 1[$	$\frac{1}{\infty} \cdot \sin(\pi/2 x) = 0$ ✔

Ahora que ya sabemos como es el cpto. C

sabemos que la "última posibilidad" pertenece al cpto. de acumulación.

Veamos entonces si el 0 y el 1 pertenece al cpto. de acumulación \rightarrow para eso hacemos una bola reducida en 0 y en 1.



Si hacemos las bolas reducidas \rightarrow tanto en el 0 como en el 1 existen ∞ puntos pertenecientes al cpto., y al interseccionar esto con C nos da el cpto. vacío.

Esto también ocurre para cualquier punto del cpto. por la misma razón.

de esta forma $C^* = C \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0, 1]\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 1/n^2\}$

Como nos piden X : los puntos de acumulación que no pertenecen a C , descartamos el propio C , quedándonos:

$X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0, 1]\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 1/n^2\}$ ☺



1.3 Sea C el conjunto del problema 1.2 y D el conjunto definido mediante:

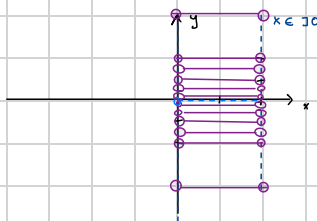
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \underbrace{0 < x < 1}_x, y = -\underbrace{\frac{1}{n+1}}_y, n \in \mathbb{N} \right\}$$

y sea $Y =]0, 1[\times]-1, 1[- (C \cup D)$.

Determinar razonadamente cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

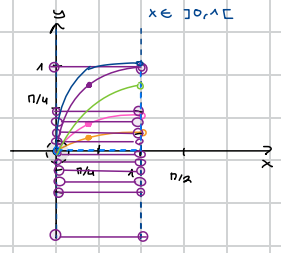
- a) Y es un conjunto abierto.
- b) Hay puntos de Y que no son interiores.
- c) Ningún punto de Y pertenece a $\text{Fr}(Y)$ (ó ∂Y).
- d) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas.

1º Representamos el cto. D

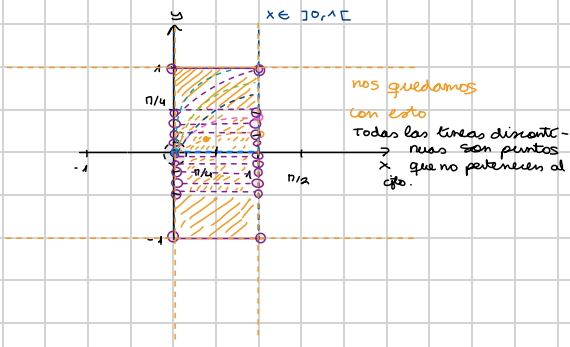


n	x	y
$n=0$	$]0, 1[$	-1
$n=1$	$]0, 1[$	$-1/2$
$n=2$	$]0, 1[$	$-1/3$
$n=3$	$]0, 1[$	$-1/4$
\vdots	\vdots	\vdots
$n \rightarrow \infty$	$]0, 1[$	0

2º Sumamos C y D



al $]0, 1[\times]-1, 1[$
le quitamos $C \cup D$



3º Analizamos las afirmaciones

a) Y es un cto. abierto. **FALSO**

conjunto abierto

- Y es abierto si:
 - Todo punto x en Y pertenece a su interior Y° \rightarrow Miramos a ver cuál es el interior de $Y \rightarrow Y$ no tiene interior porque hay ∞ pto. que no pertenecen al cto. de tal forma que si realizamos una bola abierta siempre va a haber pto. que no pertenecen al interior.
 - Si no contiene a ninguno de los puntos de su frontera \rightarrow Todos los puntos de Y pertenecen a su frontera y que no pertenecen $\rightarrow \partial Y = Y$ ya que para cada punto que pertenece al cto Y , siempre hay otro infinitamente cerca que no pertenece \rightarrow al hacer una bola abierta siempre hay pto. que pertenecen.

b) Y tiene puntos que no son interiores **VERDADERO**

Al estar tan próximos los pto. que pertenecen al cto. de los puntos que no \rightarrow ningún pto. es interior (como se ha explicado antes).

c) Ningún pto. de Y pertenece a su frontera. **Falso.**

Todos los pto. de Y pertenecen a la frontera, como se explica en 1.



I.4 Sean los siguientes conjuntos de puntos de \mathbb{R}^2 (dados por sus coordenadas cartesianas):

$$A = \{(x_n, y) / |y - x_n| < 1\}, \text{ donde } x_n = -1 + \frac{1}{n} \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

$$B = \{(x, y) / |y - x| < 1, 0 < x < 1\}$$

$$C = \{(x, x+1) / |x| \leq 1\}$$

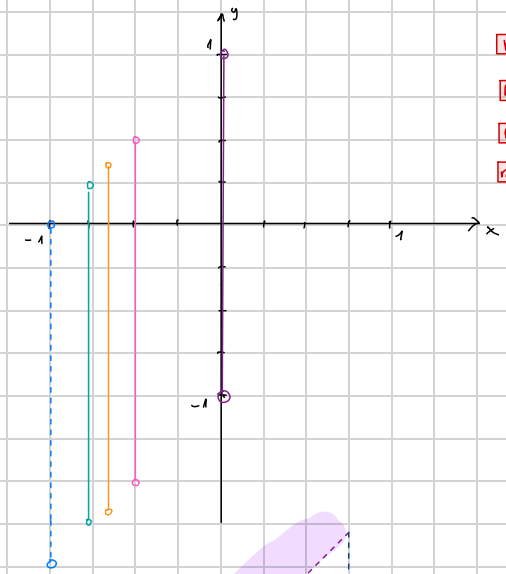
Hallar $\overset{\circ}{U}$, \bar{U} y $\text{Fr}(U)$, siendo $U = A \cup B \cup C$

Resultados: $\overset{\circ}{U} = B$;

$$\bar{U} = U \cup \{(-1, y) / -2 \leq y \leq 0\} \cup \{(1, y) / 0 \leq y \leq 2\} \cup \{(x, x-1) / x = -1 + 1/n, n \in \mathbb{N} \text{ ó } 0 \leq x \leq 1\};$$

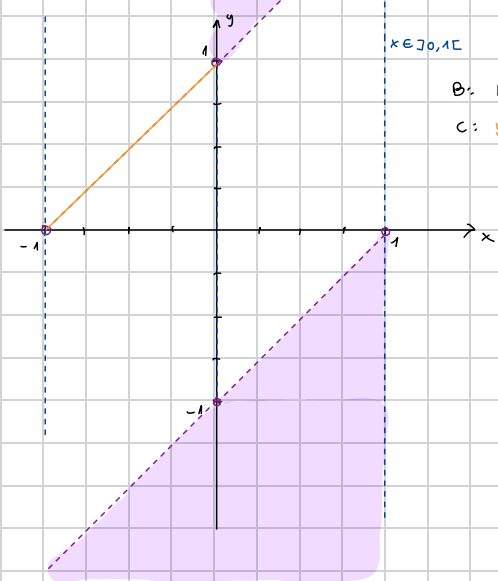
$$\text{Fr}(U) = \bar{U} - B.$$

1º Representamos A



n	x_n	y
$n=1$	0	$ y < 1$
$n=2$	0.5	$ y + 0.5 < 1$; $-1.5 < y < 1$; $-1.5 < y < 0.5$
$n=3$	0.666	$ y + 0.666 < 1$; $-1.666 < y < 1$; $-1.666 < y < 0.334$
$n=4$	0.75	$ y + 0.75 < 1$; $-1.75 < y < 1$; $-1.75 < y < 0.25$
$n \rightarrow \infty$	-1	$ y - 1 < 1$; $-1 < y - 1 < 1$; $0 < y < 2$

2º Representamos B y C

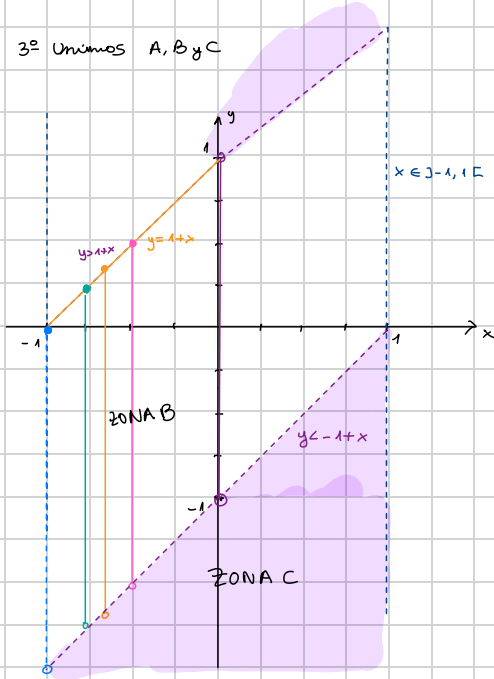


$$x \in]0, 1[$$

$$B: |y - x| < 1; -1 < y - x < 1; -1 + x < y < 1 + x$$

$$C: y = x + 1 \quad |x| \leq 1; -1 \leq x \leq 1$$

3º Unimos A, B y C



4º Hallar U° , \bar{U} y ∂U



De la Zona B podemos decir que ningún pto. pertenece al interior, ya que al estar infinitamente pegados no se puede hacer una bola abierta que solo contenga puntos del interior.

En las Zonas A y C sí que se pueden hacer estas bolas \rightarrow sus puntos son interiores \rightarrow sin incluir los extremos.

$$U^\circ = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, -1+x < y < 1+x \}$$

$$x \in]0, 1[$$

$$y < -1+x$$

$$y > 1+x$$

$$\bar{U} = U \cup \{ (-1,y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq y \leq 0 \} \cup \{ (x, x-1) \in \mathbb{R}^2 / x = -1 + \frac{1}{n}, x \in]0, 1[\}$$

Ya que en cualquier pto. del cto. (debido a que los puntos que no pertenecen están no cerca de los que pertenecen) si haces una bola abierta esta intersecciona al cto.

A esto hay que añadirle dos cosas, la última posibilidad que tenemos que forma parte de la acumulación \rightarrow y por tanto de la adherencia (ver conclusiones).

Y también la recta $y = -1+x$, porque esa no pertenece al cto. pero sí a la adherencia.

$$\partial U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -1+x, x = 1, x = -1 \} = \bar{U} - U$$

Pertenec a la frontera de las rectas $y = -1+x$, $x = 1$ e $x = -1$.

Ya que si realizas una bola abierta sobre un punto de estas, la bola contiene puntos que pertenecen y que no pertenecen al cto.