Mates II

Teoría

TEMA 1. TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}^n$

Espacio euclídeo de $\mathbb{R}^n$

Espacio euclídeo: aquel espacio en el cual se puede realizar el producto escalar entre sus vectores:

$\bar{x}\cdot\bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

Producto escalar usual

$\bar{x}\cdot\bar{x} = \|\bar{x}\|^2$

$\bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$

Norma euclídea (módulo)

$\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

- Desigualdad de Minkovski: $\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$
- Desigualdad de Schwarz: $|\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$

Ángulo entre dos vectores

$\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|}}$

Conjuntos de $\mathbb{R}^n$

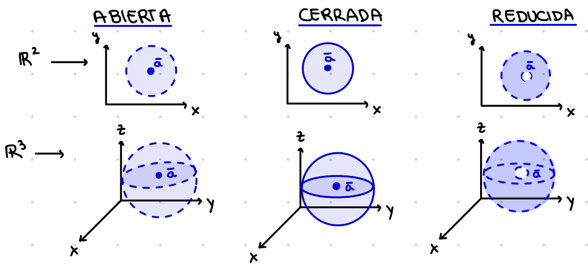
Distancia euclídea

$\boxed{d(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\|}$

- $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{y},\bar{z})$
- $d(\bar{x},\bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x})$

Bolas

- Bola abierta $B(\bar{a},\rho)$: conjunto de puntos que en $\mathbb{R}^n$ se encuentran a una distancia inferior al radio ρ de otro punto $\bar{a}$.
- Bola cerrada $B(\bar{a},\rho)$: distancia igual o inferior a ρ.
- Bola reducida $B(\bar{a},\rho)$: bola abierta que excluye al centro $\bar{a}$.

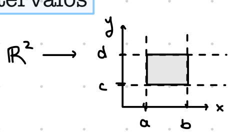


Entorno

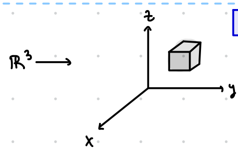
Entorno: conjunto de puntos que se encuentran cerca de otro, de manera que se podría definir como una bola reducida centrada en el punto ā cuyo radio ρ tiende a 0.

$B^*(\bar{a},\rho)$ con $\rho \to 0$

Intervalos

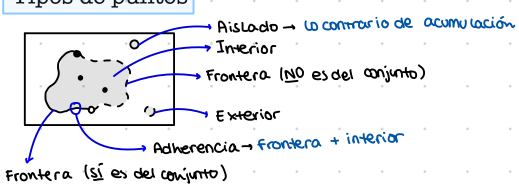


$I = \underbrace{[a,b]}_{x\in[a,b]} \times \underbrace{[c,d]}_{y\in[c,d]}$



$I = [a,b]\times[c,d]\times\underbrace{[e,f]}_{z\in[e,f]}$

Tipos de puntos



Subconjunto

Interior $\mathring{D}$

Frontera ∂D

Exterior $\mathrm{Ext}(D)$

Adherencia $\bar{D}$

Acumulación $D^c = \mathrm{Ac}(D)$

Aislado $\mathrm{Ais}(D)$

Propiedades

$\mathring{D} = D - \partial D$

$\bar{D} = \mathring{D} \cup \partial D$

Tipos de conjuntos

- Para saber si $\bar{a}$ es frontera/interior/exterior:

  Bola abierta en $\bar{a}$
  - Todos los puntos son del conjunto: Interior
  - Hay puntos tanto del conjunto como de fuera: Frontera
  - Todos los puntos NO son del conjunto: Exterior

- Para saber si $\bar{a}$ es acumulación/aislado:

  Bola reducida en $\bar{a}$
  - Hay al menos un punto del conjunto: Acumulación
  - No hay puntos del conjunto: Aislado

- Conjunto abierto $D = \dot{D}$
- Conjunto cerrado $\partial D \subset D$
- Conjunto acotado: se puede encerrar dentro de una bola finita
- Conjunto compacto: cerrado y acotado
- Conjunto conexo por arcos: se pueden unir todos los puntos entre sí sin salirnos del conjunto

Funciones multivariable

- Funciones escalares: el resultado es un escalar

  $f(x,y) = x + y^2$
- Funciones vectorial: el resultado es un vector

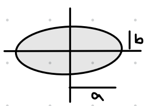
  $\bar{F}(x,y) = (2x, 2xy)$

Resumen de cónicas

Ecuación y forma

Elipse

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$$

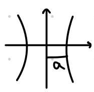


circunferencia

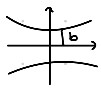
$a = b = R \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = R^2}$

$\left.\begin{array}{l}(x-x_0)^2 \\ (y-y_0)^2\end{array}\right\} \rightarrow$ centro en (x_0, y_0)

Hipérbola



$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$$



$$\boxed{\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1}$$

Completar cuadrados

$$\boxed{x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Ej: $x^2 - 4x + y^2 = 0$

$x^2 - 4x + 0 = (x-2)^2 - \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = (x-2)^2 - 4$

$(x-2)^2 - 4 + y^2 = 0 \rightarrow (x^2-2)^2 + y^2 = 4$