Mates I

ÍNDICE:

ÁLGEBRA

9/9/24

TEMA 0: REPASO DE MATRICES Y DETERMINANTES

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & \end{pmatrix}$$

m: columnas

n: filas

Traza: suma de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad tr(A) = 2 + 3 + 7 = 13$$

RANGO: nº. de filas o columnas que son linealmente independientes, es decir: nº. de líneas no nulas.

Ej.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow rg(A) = 3$

¡IMPORTANTE! $rg(A) = rg(A^T)$ el rango de una matriz es igual al de su transpuesta.

SISTEMAS DE ECUACIONES

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = 4 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

si $r(A) = r(A^*) = 2 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -2y - 2z = 1 \\ z = 0 \end{array}\right\} \boxed{z = 0,\ y = -\frac{1}{2},\ x = \frac{7}{2}}$$

también se puede hacer así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 + 2F_3 \\ F_1 - F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{2F_1 + F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{\frac{1}{2}F_1 \\ -\frac{1}{2}F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x = 7/2 \\ y = -1/2 \\ z = 0 \end{array}$$

PIVOTE

matriz identidad

Al hacer las mismas operaciones elementales sobre la matriz A y el término independiente b se consigue llegar a la matriz identidad y a la solución del sistema de ecuaciones.

MATRICES INVERTIBLES una matriz es invertible si $A \cdot A^{-1} = I$ o $A^{-1} \cdot A = I$

Cálculo de la inversa con Gauss-Jordan:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 + F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{2F_3 - F_2 \\ F_1 - F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

matriz A; matriz identidad I

matriz identidad I; matriz inversa de A: A^{-1}

EJERCICIOS ÁLGEBRA TEMA 0:

OE11 Hallar el rango de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en función de α:

MÉTODO DE GAUSS:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2F_2-F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2\alpha & 3 & 12-\alpha \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2F_3+F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2\alpha & 3 & 12-\alpha \\ 0 & 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \overset{\alpha F_3-F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2\alpha & 3 & 12-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-3 & -(\alpha^2-12) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2\alpha & 3 & 12-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-3 & -[(\alpha-3)(\alpha+4)] \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = 3 \rightarrow rg\,A = 2$ porque solo quedarían 2 columnas NO nulas.

Si $\alpha \neq 3 \rightarrow rg\,A = 3$ porque siempre habría 3 columnas NO nulas.

OE12 Hallar el rango de $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ en función de a y b.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_2-F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -3-a & 2-b \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_3+F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -3-a & 2-b \\ 0 & -2+a & 3+b \end{pmatrix} \overset{F_3+F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -3-a & 2-b \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{si } -3-a=-5;\ a\neq 2 \\ \text{si } 2-b = 5;\ b\neq -3 \end{array}\right\}$ si $a=2$ y $b=-3 \rightarrow$ 2 columnas no nulas $\rightarrow$ rg 2.

si $a = 2$ y $b = -3 \rightarrow rg\,A = 2$ (dos columnas no nulas)

si $a \neq 2$ y $b \neq -3 \rightarrow rg\,A = 3$ (tres columnas no nulas)

OE20 Hallar el valor del parámetro α que hace compatible al siguiente sistema y resolverlo:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 5 \\ -x + 7y + 9z = \alpha \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 7 & 9 & \alpha \end{array}\right) \overset{F_2-2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ -1 & 7 & 9 & \alpha \end{array}\right) \underset{\text{SIMPLIFICAR}}{\overset{-\frac{1}{5}F_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 9 & \alpha \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 9 & \alpha \end{array}\right) \overset{F_3+F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & \alpha \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \text{si } \alpha = -10 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & -10 \end{array}\right) \overset{F_3+10F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{2 columnas no nulas} \left\langle \begin{array}{l} rg\,A = 2 \\ rg\,A^* = 3 \end{array} \right\} \text{SCI} \\ \text{si } \alpha \neq 10 \Rightarrow \text{por ej.: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 2 \end{array}\right) \overset{F_3+10F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) \quad 0 = 12 \} \text{ SI} \end{cases}$$

RESOLVEMOS EL SCI CON $\alpha = -10$

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \rightarrow x + 3(-1-z) + z = 0;\ x - 3 - 3z + z = 0;\ \boxed{x = 3 + 2z} \\ -y - z = 1 \rightarrow \boxed{y = -1 - z} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Sol.}: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

OE4 Hallar todas las matrices de tamaño 2x2 que conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ // matriz A

Para que dos matrices conmuten: AB = BA

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\left.\begin{cases} \cancel{x} = \cancel{x} + y;\ y = 0 \\ y = y \\ x + \cancel{z} = \cancel{z} + t;\ x = t \\ \cancel{y} + t = t \end{cases}\right] B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix}$$

OE6 Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Hallar todos los posibles valores de a y b que hacen que $A^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando decimos que A*A=1 en un contexto de matrices, nos referimos a que A*A=I, siendo I la matriz identidad

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \\ 2ab = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0 \end{cases} \begin{cases} \text{si } a = 0 \rightarrow b = \pm 1 \\ \text{si } b = 0 \rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

OE7 Hallar los números reales x, y, z, u, v para los que se verifica que: $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & y \\ z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & v \\ u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{x \quad 2} \\ 0 \quad y \\ z \quad 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}-1 \\ u\end{matrix}} & v \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \left.\begin{cases} -x + 2u = 5 \to x = 2u - 5 \\ xv = 1 \\ uy = -3 \\ -z + u = 1 \\ zv = 2 \end{cases}\right\}$$

$$(2u-5)v = 1; \begin{cases} 2uv - 5v = 1 \\ uy = -3 \\ -z + u = 1 \to u = 1 + z \\ zv = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(1+z)v - 5v = 1 \\ (1+z)y = -3 \\ zv = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -3v + 2zv = 1 \\ y + zy = -3 \\ zv = 2 \longrightarrow z = \dfrac{2}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3v + 2 \cdot \dfrac{2}{\cancel{v}} \cdot \cancel{v} = 1 \\ y + \dfrac{2}{v} \cdot y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} -3v + 4 = 1; \ \boxed{v = 1} \\ y + 2y = -3; \ \boxed{y = -1} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} z = \dfrac{2}{v}; \ \boxed{z = 2} \\ u = 1 + z; \ \boxed{u = 3} \\ x = 2u - 5; \ \boxed{x = 1} \end{matrix}\right\} \quad \boxed{\text{Sol.}: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ u = 3 \\ v = 1 \end{cases}}$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR GAUSS: EJ. PARA PRACTICAR

A)

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ A}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ I}}\right) \underset{F_2 - F_1}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \underset{F_3 + F_2}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right) \underset{F_2 + F_1}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right) \underset{F_1 - F_3}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right) \underset{F_2 = F_3 - F_2}{\sim} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ I}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ A^{-1}}}\right)$$

B)

$$B = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ B}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ I}}\right) \underset{F_3 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \underset{F_1 = F_2 + F_1}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \underset{F_3 = -2F_2 + F_3}{\sim} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ I}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{matrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ B^{-1}}}\right)$$

Cálculo

TEMA 1: LOS NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

COSMIC NOTES

Naturales : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$ $0 \in \mathbb{N}$

N está ordenado.

ENTEROS : $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, 2, -2 \dots\}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Si sumas o multiplicas números naturales dan un entero.

Cuerpo: se verifican las siguiente propiedades y tiene asociadas las operaciones suma y producto por escalar $(+, \cdot)$

- ASOCIATIVA
- CONMUTATIVA
- ELEMENTO NEUTRO: nulo 0 y unidad 1.
- ELEMENTO OPUESTO / INVERSO
- DISTRIBUTIVA

cuerpo ordenado

RACIONALES : $\mathbb{Q}$ números $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Q es un cuerpo ordenado.

Si trabajamos con los racionales siempre dan racionales.

REALES : $\mathbb{R}$ Son la suma de los racionales e irracionales.

- Cuerpo ordenado
- Densos en $\mathbb{R}$: existen infinitos nº. entre dos números reales
- $\mathbb{I}$ no es un cuerpo.

Ejercicios de los nº. reales

1.1 Sean dos racionales a, b ∈ Q, con a>b. Hallar un algún irracional i ∈ $\mathbb{I}$ tal que a<i<b

Ejemplo: $q = a + \frac{b-a}{2}$ Todos racionales ⇒ racional

$i = q \cdot \pi$ un irracional · racional ⇒ irracional

irracional ÷ irracional

$i' = a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$

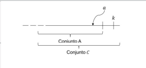
Los irracionales son no son un cuerpo porque irracional · irracional no tiene por qué ser enteros.

1.3 Dado un número real x, llámese x^a al número “anteriorl a x. Acerca de x^a se puede decir que: 1°Existe y se puede hallar, 2°existe pero no se puede hallar, 3°no existe

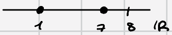
No existe porque entre dos números racionales e irracionales hay un cjto. infinito de números reales así que no existiría un "anterior".

¡Duda!: ¿los racionales o irracionales?

Existencia del supremo y el ínfimo



COTA: un cjto. de números presenta una cota superior si existe un valor tal que todos los nº. pertenecientes al cjto. son menores o iguales que ese valor



Para que 7 sea supremo tiene que ser el mayor nº del conjunto A y el menor número del cjto. que incluye todos los números desde el 7 al ∞.

$A = [1,7]$

cjto de todas las cotas superiores: $C = [7, \infty)$

7 es el supremo porque es el menor de las cotas superiores

Y se me desplazo una cantidad ε>0 tal que $7-\varepsilon$, aparece al menos un punto perteneciente al cjto. A.

Tma. del supremo: si hay un cjto. de número reales ≠0 y acotado superiormente entonces existe un único número real que es el supremo del cjto.

↳ esto hace que los nº. reales sean un cuerpo completo sin huecos al juntar los $\mathbb{Q}$ y los $\mathbb{I}$.

si $A = [1,7]$ entonces 7 es el máx. y el supremo.

si $A = [1,7)$ entonces sólo es el supremo.

T1.3 Sean x e y dos números reales tales que x+y y x*y son ambos racionales y no nulos. Entonces:

A) x e y han de ser ambos racionales

B) uno al menos de los x e y es racional

C) si uno de los x e y es irracional, también lo es el otro

D) no es cierta ninguna de las anteriores

$x = 1 - \sqrt{2}$ $\quad x + y = 2$

$y = 1 + \sqrt{2}$ $\quad x \cdot y = 1 - 2 = -1$

$r_1 = x + y$

$r_2 = x \cdot y$ $\quad (r_1, r_2 \in \mathbb{Q})$

$x \in \mathbb{I}$

$y = r_1 - x$

si sumas o restas algo que no es del cuerpo te vas del cuerpo.

T1.1 Sea R distinto de 0 un número racional dado, si I, J pertenecen a los reales son tales que I+J pertenecen a los reales e I=$\sqrt{2}$J, entonces:

A) para algún valor de R, I y J son ambos racionales

B) para algún valor de R, I puede ser racional pero J no

C) para ningún valor de R, Iy J pueden ser ambos racionales

D) no es cierta ninguna anterior

NOTA:

racional ÷ racional → racional

Racional ÷ irracional → irracional

irracional ÷ irracional → irracional / racional

$R \in \mathbb{Q}$

$\left.\begin{array}{l} I + J = R \\ I = \sqrt{2}\, J \end{array}\right\}$ $\sqrt{2}\,J + J = R$

$(\sqrt{2}+1)\,J = R$; $J = \dfrac{R}{\sqrt{2}+1}$ racional

$I = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot R$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{1-2} = (-\sqrt{2}+2)\,R$ irracional

I.7 Sean a y b dos números reales distintos de cero, sea $a-b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ (nótese que $a-b \neq 0$). Entonces:

a) a^2-b^2 siempre es irracional. **b)** $a+b$ no puede pertenecer a $\mathbb{Q}$.

c) a y b son irracionales. **d)** Existen a y b / $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

$i = a - b \in \mathbb{I}$

$\left.\begin{array}{ll} x = 1 - \sqrt{2} & x + y = 2 \\ y = 1 + \sqrt{2} & x - y = -2\sqrt{2} \end{array}\right\}$ b) falsa

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \underbrace{i}_{\mathbb{I}}(a+b)$

$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = \sqrt{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a - b = 1 - \sqrt{2} \\ a^2 - b^2 = 1 - 2 = -1 \end{array}\right\} \to$ a) falsa

c) a y b son irracionales

no tiene porque.

d) verdadero

si $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \to$ irracional

NOTA:

irracional - irracional → racional / irracional

irracional - racional → irracional

racional - racional → racional

T1.17 **I.17** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $b^2 \in \mathbb{Q}$ $a > 0$ y $b > 0$. Entonces:

- **a)** Si $a + b$ es racional entonces necesariamente b es irracional.
- **b)** Si $a + b$ es racional entonces b puede ser racional.
- **c)** Si $a + b$ es irracional entonces necesariamente b es irracional.
- **d)** El número $a + b$ es irracional para cualqueir b real.

Nota:

racional + racional = racional
irracional + irracional ⇒ $\begin{cases} \text{racional} \\ \text{irracional} \end{cases}$
racional + irracional = irracional

Datos: $\begin{cases} a \in \mathbb{I} \\ b^2 \in \mathbb{Q} \end{cases}$

a) Verdadera.
Si a es irracional la única forma de que la suma de a y b sea racional es con b como irracional.

b) Falso.
$\underbrace{\text{Racional}}_{b} + \underbrace{\text{Irracional}}_{a} = \text{irracional}$

c) Falso. Ver nota, b podría ser racional.

d) Falso. b puede ser racional.

I.18 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $b^2 \in \mathbb{Q}$ $a > 0$ y $b > 0$. Entonces:

- **a)** Si $a \cdot b$ es racional entonces necesariamente b es irracional.
- **b)** Si $a \cdot b$ es racional entonces b puede ser racional.
- **c)** Si $a \cdot b$ es irracional entonces necesariamente b es irracional.
- **d)** El número $a \cdot b$ es irracional para cualquier b real.

Datos: $\begin{cases} a \in \mathbb{I} \\ b^2 \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Nota:

racional · racional = racional
irracional · irracional ⇒ $\begin{cases} \text{racional} \\ \text{irracional} \end{cases}$
racional · irracional = irracional

a) Verdadero.

Si a es irracional y a · b es racional la única opción es que b sea también irracional.

b) Falso.
La única opción de que el resultado de una multiplicación de un irracional por un real de un racional es si el real es irracional.

c) Falso. b podría ser racional.

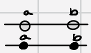
d) Falso. Si b fuera irracional a · b podría serlo también.

VALOR ABSOLUTO: máx. $\{x, -x\} = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

DISTANCIA ENTRE Nº. REALES: distancia entre un nº. x y un nº y es: $d(x,y) = |x - y|$

INTERVALOS

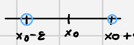
Abierto: $]a, b[$
Cerrado: $[a, b]$



Cerrado y acotado ⟶ compacto
↳ no se va al infinito. ej.: $[3, 5]$

ENTORNO: intervalo abierto

$E(x_0, \varepsilon) \equiv \,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$



Entorno reducido: entorno que excluye al centro x_0

$E(x_0, \varepsilon) \equiv \,]x_0 - \varepsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \varepsilon[$

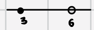
Ejercicios de inecuaciones

(cuadernillo de problemas de cálculo)

d) $4 \leq (x+1) < 7$

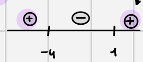
$3 \leq x < 6$

Sol.: $\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 6\}$



f) $x^2+3x-4>0$; $(x+4)(x-1)>0$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot 1 \cdot (-4)}}{2}$ ⟨ $x=1$; $x=-4$

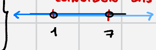


Probamos números dentro de las franjas y vemos si es positivo o negativo

Sol.: $]-\infty,-4[\cup]1,\infty[$

i) $|x-3| < 4$ $\begin{cases} x-3<4 & \text{si } x>0 \\ -(x-3)<4 & \text{si } x<0 \end{cases}$ $\to \boxed{x<7}$; $\to -x+3<4$; $-x<1$; $\boxed{x>1}$

COINCIDEN LAS DOS CONDICIONES



$\boxed{]1,7[}$

O así:

$-4<x-3<4$

$\boxed{-1<x<7}$ o $\boxed{]-1,7[}$

Ejercicios recomendados del guion: tests

Pág. 79

I.6 Sea $A=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{|x^2-2x|-|x|}{x-3}\leq 0,\ x\neq 3\right\}$. El conjunto A es tal que:

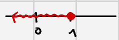
a) $A=]-\infty,1]\cup]3,+\infty[$ b) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas

c) $A=]-\infty,1]$ d) $A=]-\infty,3[$

$\dfrac{|x^2-2x|-|x|}{x-3} \leq 0$; $\dfrac{|x|\,(|x-2|-1)}{x-3} \leq 0$

ESTUDIAMOS EL SIGNO DE LA FRACCIÓN:

- Si $x>3$ → $(|x-2|-1)$ siempre será >0 ⟶ no existe solución en este intervalo.
- Si $x<3$ → $|x|=-x$; $-x(-x+2-1) = x^2-x = x(x-1) \leq 0$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

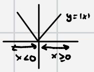


$\boxed{\text{Sol. } x \in]-\infty,1]}$ c)

I.8 Sea $A=\{x\in\mathbb{R}/|x^2-3|x|+2|<3x-6\}$. El conjunto A es tal que:

a) $A=]2,4[$ b) $A=]2,3[\cup\left]\frac{5}{2},4\right[$ c) $A=]-8,4[$ d) No es cierta ninguna de las otras tres respuestas

$A = |x^2-3|x|+2|<3x-6$



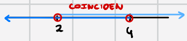
$|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-3x+2<3x-6 & \text{si } x>0 \\ -x^2+3(-x)+2<3x-6;\ -x^2-6x+8<0 & \text{si } x<0 \end{cases}$

$\to x^2-6x+8<0$; $x < \dfrac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 1\cdot 8}}{2}$ ⟨ $\boxed{x<2,\ x<4}$

$\to x^2-6x+8>0$; $x > \dfrac{6\pm\sqrt{36-4\cdot(-1)\cdot 8}}{2}$ ⟨ $\boxed{x>2,\ x>4}$

COINCIDEN



$\boxed{\text{Sol. }]2,4[}$