Física II

ÍNDICE:

TEMA 1: TEORÍA DE CAMPOS

Si un campo NO depende de la posición se conoce como campo uniforme.
Si NO del tiempo: campo estacionario.

Operador Nabla

$\nabla = \bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ Ejemplo: $f(x,y,z) = xyz$; $f'x = yz$, $f'y = xz$, $f'z = xy$

Gradiente: el gradiente de un campo escalar es la dirección de máx. crecimiento para dicho punto.

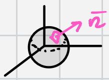
Ejemplo: determina ∇f para $f(x,y,z) = xyz$ en $(1,2,1)$

$\nabla f = (f'x, f'y, f'z) = (yz, xz, xy)$

$\nabla f(1,2,1) = (2,1,2) = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$

vector normal de una superficie

$\boxed{\bar{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}}$



derivadas direccionales

$\boxed{\frac{df}{du} = \Delta f \cdot \bar{u}}$

campos vectoriales

Fuentes: pto. donde nacen las líneas de campo

Sumideros: pto. donde mueren las líneas de campo.

operadores vectoriales

Divergencia: $\text{Div } f = \nabla \cdot \bar{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

↳ sentido físico:

- div F > 0 P es una fuente
- div F < 0 P es un sumidero
- div F = 0 P no es ni fuente ni sumidero.

Flujo: $\boxed{\phi = \iint_S \bar{F} \cdot d\bar{s}}$

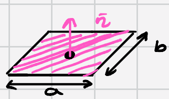
siendo $F = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$

$\boxed{d\bar{s} = ds \cdot \bar{n}}$

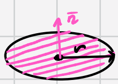
↳ vector normal de la superficie

¿cómo es el ds y el normal en función de la figura?

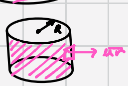
$\boxed{\text{cuadrados}}$ $ds = dx\,dy$



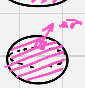
$\boxed{\text{círculos}}$ $ds = r\,dr\,d\theta$



$\boxed{\text{cilindros}}$ $ds = R\,d\theta\,dz$



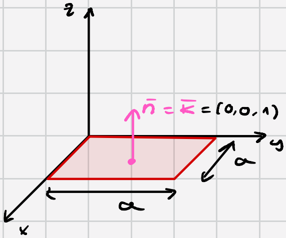
$\boxed{\text{esfera}}$ $ds = R \sin\phi\, d\theta\, d\phi$



"Ppio. de superposición de flujos"

$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \cdots$

Ejemplo: calcula $\nabla \cdot \bar{J}$ y su flujo para un cuadrado de lado a como el de la figura. $\bar{F}(x,y,z) = yz\,\bar{i} + xz\,\bar{j} + (xy+z)\bar{k}$



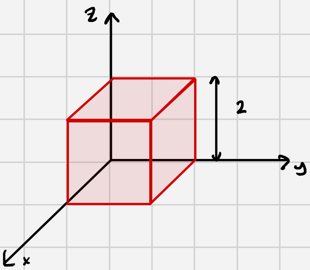
$$\nabla \cdot \bar{F} = \left(\frac{\partial yz}{\partial x} + \frac{\partial xz}{\partial y} + \frac{\partial (xy+z)}{\partial z}\right)$$

$$\nabla \cdot \bar{F} = 0 + 0 + 1 = 1$$

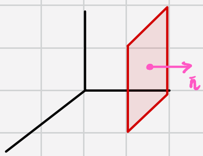
$$\phi = \iint \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint (yz, xz, xy+z) \cdot (0,0,1)\,dS = \iint xy + \cancel{z}^{\,z=0}\,dS$$

$$\phi = \int_{y\,0}^{a}\int_{x\,0}^{a} xy\,dx\,dy = \int_{x\,0}^{a} \frac{a^2}{2}x\,dx = \boxed{\frac{a^4}{4}}$$

Calcular el flujo del campo. $\bar{v} = yz\,\bar{i} + xz\,\bar{j} + yx\,\bar{k}$ a través de todas las caras del cubo de lado 2.

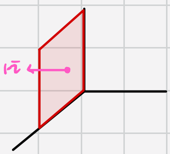


$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 = \boxed{0}$$

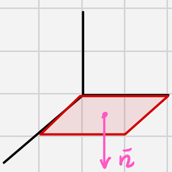


$$\phi_1 = \iiint (yz, xz, yx) \cdot (0,1,0)\,dx\,dy\,dz$$

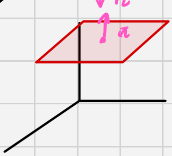
$$\phi_1 = \int_{x\,0}^{2}\int_{z\,0}^{2} xz\,dx\,dz = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = 4$$



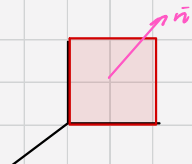
$$\phi_2 = \iiint (yz, xz, yx) \cdot (0,-1,0)\,dx\,dy\,dz = \int_{x\,0}^{2}\int_{z\,0}^{2} xz\,dx\,dz = -4$$



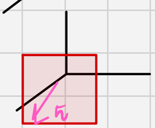
$$\phi_3 = \iiint (yz, xz, yx) \cdot (0,0,-1)\,dx\,dy\,dz = \int_{x\,0}^{2}\int_{y\,0}^{2} -yx\,dx\,dy = -\frac{x^2}{2} + 0 - \frac{y^2}{2} + 0 = -4$$



$$\phi_4 = \iiint (yz, xz, yx) \cdot (0,0,1)\,dx\,dy\,dz = \int_{x\,0}^{2}\int_{y\,0}^{2} yx\,dx\,dy = 4$$



$$\phi_5 = \iint (yz, xz, yx) \cdot (-1,0,0)\,dx\,dy\,dz = -4$$



$$\phi_6 = \iint (yz, xz, yx) \cdot (1,0,0)\,dx\,dy\,dz = 4$$

Rotacional $(\nabla \times \bar{F})$

$$\text{rot } \bar{F} = \nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \dots$$

Circulación (Γ)

$$\Gamma = \int_C \bar{F} \cdot \bar{dl}$$

$$\bar{dl} = \bar{t} \cdot dl \quad \begin{cases} t = \text{vector tangente a la curva} \\ dl = \text{diferencial de longitud de la curva} \end{cases}$$

Rectas, parábolas, cúbicas

$$\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases} \qquad \bar{dl} = \left(\frac{dx}{d\lambda} \bar{i} + \frac{dy}{d\lambda} \bar{j} + \frac{dz}{d\lambda} \bar{k} \right) d\lambda$$

circunferencias

$\boxed{\text{Cambio a coordenadas polares}}$: $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$ $\bar{dl} = \left(\frac{dx}{d\theta} \bar{i} + \frac{dy}{d\theta} \bar{j} \right) d\theta$

Campos irrotacionales y solenoides

IRROTACIONAL

- $\nabla \times \bar{F} = 0$
- $\bar{F}$ procede de un campo escalar V denominado **potencial** tal que:

  $$\bar{F} = -\text{grad } V = -\nabla V$$

- La circulación de un campo irrotacional NO DEPENDE de la curva, sino de los puntos final e inicial.

  ↳ se puede calcular su circulación con cualquier curva que pase por A y B.

SOLENOIDAL

- $\nabla \cdot \bar{F} = 0$
- No hay fuentes ni sumideros
- No procede de un campo escalar v sino de un campo vectorial $\bar{A}$ tal que:

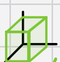
  $\bar{F} = \nabla \times \bar{A}$

- Sus líneas de campo no tienen ni inicio ni final.

Teorema de integrales

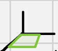
Tma. de Gauss:

El flujo total de una **superficie cerrada** (que encierra un volumen) se puede calcular como:


sí ✓

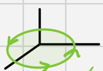
$$\phi_T = \iiint (\nabla \cdot \bar{F}) \, dv$$

divergencia


No X (no tiene volumen, sólo es una superficie)

Tma. de Stokes:

La circulación de una **curva cerrada** se puede calcular como:


Sí ✓


No X

$$\Gamma = \iint (\nabla \times \bar{F}) \, ds$$

rotacional

el de la superficie que encierra; cuadrado, círculo...

EJERCICIOS DE EXÁMENES PARA PRACTICAR

1º Si tienes el campo escalar $f(x,y,z) = x^2+y^2$.
calcula su derivada direccional en el punto $P(1,0,1)$ en la dirección que apunta hacia $Q(2,2,0)$

$$\frac{df}{du} = \nabla f \cdot \bar{u}$$

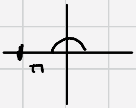
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 0) \xrightarrow{P} (2,0,0)$$

$$\bar{u} = \frac{\overline{PQ}}{|PQ|} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}, \frac{-1}{\sqrt6}\right)$$

$$\nabla f \cdot \bar{u} = \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt6} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt6} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt6}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt6} = \sqrt{\frac{4}{6}} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

2º Dado $f(x,y,z) = \frac{a}{\pi} \sin \pi x + \frac{b}{\pi} \cos \pi y$, su derivada direccional en $P(1,2,0)$ en la dirección hacia $Q(0,3,2)$ es:

$$\frac{df}{du} = \nabla f \cdot \bar{u}$$



$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (a\cos(\pi x), -b\,\mathrm{sen}(\pi x), 0) \xrightarrow{P} (-a, 0, 0)$$

$$\bar{u} = \frac{\overline{PQ}}{|PQ|} = \frac{(-1,1,2)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}\right)$$

$$\frac{df}{du} = (-a,0,0) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}\right) = \boxed{\frac{a}{\sqrt6}}$$

3º Derivada direccional de un campo escalar en la dirección de $\bar{u} = \bar{k}$ es $\frac{df}{dl} = c$, siendo c cte.

Un campo compatible puede ser:

a) $f = c z^2$

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial z} = (0,0,2cz)$

$\frac{df}{du} = (0,0,2cz) \cdot (0,0,1)$

$\frac{df}{du} = 2cz$ $\boxed{\text{NO}}$

b) $f = Axy + c$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$\nabla f = (Ay, Ax, 0)$

$\frac{df}{du} = (Ay, Ax, 0) \cdot (0,0,1)$

$\frac{df}{du} = 0$ $\boxed{\text{No}}$

c) $f = Axyz - C$

$\nabla f = (Ayz, Axz, Axy)$

$\frac{df}{du} = (Ayz, Axz, Axy) \cdot (0,0,1)$

$\frac{df}{du} = Axy$ $\boxed{\text{NO}}$

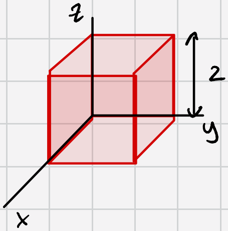
d) $f = Ax + by + cz$

$\nabla f = (A, b, c)$

$\frac{dl}{du} = (A, b, c) \cdot (0,0,1)$

$\frac{df}{du} = c$ $\boxed{\text{Sí}}$

4º Calcular el flujo del campo $\bar{v} = (yz\bar{i} + xz\bar{j} + yx\bar{k})$ a través de las caras del cubo de lado 2.



¿Es una superficie que encierra un volumen?

Sí.

¿La función existe en el punto?

Sí

→ **Tma. de Gauss**

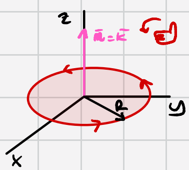
Tma. de Gauss: $\phi_T = \iiint (\nabla \cdot \bar{v})\, dv$

$$\nabla \cdot \bar{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0, 0, 0)$$

$$\phi_T = \iiint 0 \cdot dv = \boxed{0}$$

5º Campo vectorial $\bar{v} = \bar{k} \times \bar{r}$; $\bar{r} = (x\bar{i}, y\bar{j}, z\bar{k})$. Calcular la circulación en sentido antihorario de un círculo de radio R en $z=0$.

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = x\bar{j} - y\bar{i} = -y\bar{i} + x\bar{j}$$



¿Es una curva cerrada? Sí

¿La función existe en el punto? Sí

→ **Teorema de Stockes**

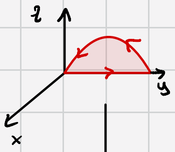
Tma. de Stockes $= \Gamma_T = \iint (\nabla \times \bar{v})\, d\bar{S}$

$d\bar{S} = dS \cdot \bar{n}$

$$\nabla \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x}\bar{k} + \frac{\partial y}{\partial y}\bar{k} = 2\bar{k}$$

$$\Gamma_T = \iint (0,0,2)\cdot(0,0,1)\cdot dS = \iint 2\, dS = 2 \cdot S = \boxed{2\pi R^2}$$

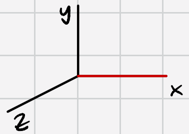
6º **Calcula la integral de línea del campo vectorial $\bar{w} = x^3\bar{i} + 2y\bar{j} + (z^2-1)\bar{k}$ a lo largo de la semicircunferencia de radio unidad de la figura recorrida en sentido horario**



¿Curva cerrada? No $\longrightarrow$ no podemos usar Stokes

Miramos $\nabla \times \bar{v}$, si $\nabla \times \bar{v} = 0$ entonces es un campo irrotacional y podemos elegir una curva cualquiera siempre que tenga el mismo inicio y fin.

$$\nabla \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^3 & 2y & (z^2-1) \end{vmatrix} = 0$$ sí podemos elegirla



$$\begin{Bmatrix} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} dl = (1,0,0)$$

$d\bar{l} = \bar{t} \cdot dl$

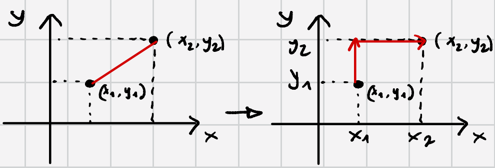
$$\int = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int (x^3, 2y, (z^2-1))(1,0,0)\, d\lambda = \int_0^{R=1} \lambda^3 d\lambda = \left[\frac{\lambda^4}{4}\right] = \boxed{\frac{1}{4}}$$

7º **Calcular la integral de línea del campo vectorial $\bar{w} = y^2\bar{i} + 2xy\bar{j} + az\bar{k}$ donde a es cte., a lo largo de una línea arbitraria Γ desde $(x_1, y_1, 0)$ hasta $(x_2, y_2, 0)$**

$C = \int_\Gamma \bar{w} \cdot d\bar{l}$

Miramos su rotacional: $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & 2xy & az \end{vmatrix} = 2y\bar{k} - 2y\bar{k} = 0$

Elegimos la curva que prefiramos.



$$\int_1 = \int \bar{v} \cdot d\bar{l}_1 = \int_{y_1}^{y_2} (y^2, 2xy, az) \cdot (0,1,0)\, d\lambda =$$

$$d\bar{l}_1 \begin{Bmatrix} x = x_1 \\ y = \lambda y_1 \\ z = 0 \end{Bmatrix} dl_1 = (0,1,0)$$

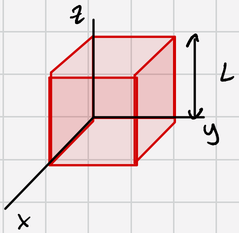
$$= \int_{y_1}^{y_2} 2xy\, dy = \cancel{2}x_1 \left[\frac{y^2}{\cancel{2}}\right]_{y_1}^{y_2} = \boxed{x_1(y_2^2 - y_1^2)}$$

$$\int_2 = \int (y^2, 2xy, az) \cdot (1,0,0) = \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = y_2^2 \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\begin{Bmatrix} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} d\bar{l} = (1,0,0)$$

$$\int_T = \int_1 + \int_2 = \boxed{x_1(y_2^2 - y_1^2) + y_2^2(x_2 - x_1)}$$

8º Calcular el flujo del campo $\bar{v} = 2y\,\bar{i} + 2x\,\bar{j} + 3z\bar{k}$ a través de la superficie del cubo cuyas aristas son de longitud L



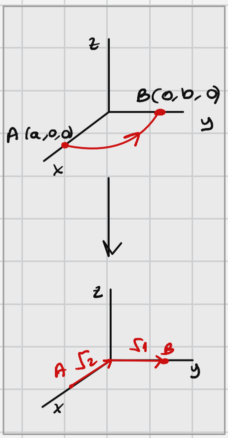
¿superficie cerrada? sí
¿Existe la función en el punto? sí
⟩ Tma. de Gauss

$$\boxed{\text{Tma. de Gauss: } \phi_T = \iiint (\nabla\cdot\bar{v})\cdot dv}$$

$$\phi_T = \iiint (0,0,3)\cdot d\bar{v} = \iiint 3\,dv = 3\cdot v = \boxed{3L^3}$$

$$\nabla\cdot\bar{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0,0,3)$$

9º Dado el campo vectorial $\bar{v} = x^2\bar{i} + 2zy\,\bar{j} + y^2\bar{k}$ y la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ contenida en $z=0$. Calcular la integral de la línea de campo a lo largo del cuarto de elipse que se extiende desde A hasta B.



¿Es una curva cerrada? No ⟶ no podemos utilizar Stockes

¿Su rotacional es 0? sí ⟶ podemos utilizar la curva que queramos

$$\nabla\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 & 2zy & y^2 \end{vmatrix} = \frac{\partial y^2}{\partial y}\bar{i} - \frac{\partial\, 2zy}{\partial z}\bar{i} = 0$$

$$\int_T = \int_1 + \int_2$$

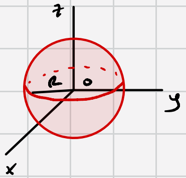
$$\int_1 = \int \bar{F}\cdot d\bar{l} = \int (x^2, 2zy, y^2)\cdot(0,1,0)\,d\lambda = \int 2\cancel{z}y\,d\lambda = 0 \quad (z=0)$$

$$d\bar{l} = \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{Bmatrix} dl = (0,1,0)$$

$$\int_2 = \int \bar{F}\cdot d\bar{l} = \int (x^2, 2zy, y^2)\cdot(-1,0,0) = \int -\underbrace{x^2}_{x=\lambda}\,d\lambda = \int_0^a -\lambda^2\,d\lambda = \left[-\frac{\lambda^3}{3}\right]_0^a = \boxed{\frac{-a^3}{3}}$$

$$d\bar{l} = \begin{Bmatrix} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} dl = (-1,0,0)$$

10º Dado el campo vectorial $\bar{w} = 3Dx\bar{i} + (2-Hyz)\bar{j} + (Hz^2/2 - 1)\bar{k}$ donde H y D son ctes., calcular el valor del flujo a través de una esfera centrada con radio R.



¿Encierra un volumen? Sí
¿Existe la función en el pto? Sí } Tma. de Gauss

$\boxed{\text{Tma. de Gauss: } \phi_T = \iiint (\nabla\cdot\bar{w})\,dv}$

$$\phi_T = \iiint 3D\,dv = 3D\cdot v = \cancel{3}D\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\pi R^3 = \boxed{4\pi D R^3}$$

$$\nabla\cdot\bar{w} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = 3D \cancel{- Hz + Hz} = 3D$$

11º Dado un campo $\bar{w} = 2Ex^2\bar{j}$ (E es cte.), la integral de línea desde el punto (0,0,0) al punto $(K, FK^2, 0)$ a lo largo de la curva $y = Fx^2$, $z = 0$, siendo F cte. es: $K=1$

$$\Gamma = \int \bar{F}\cdot d\bar{l} = \int_0^1 (0, 2E\underbrace{x^2}_{x=\lambda}, 0)\cdot(1, 2\lambda F, 0)\,d\lambda = \int_0^1 E\underbrace{\lambda^3}_{\lambda=K} F\,d\lambda =$$

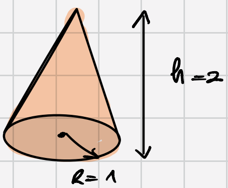
$$d\bar{l} = \bar{t}\cdot dl$$

$$= 4EF\cdot\left[\frac{K^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{EFK^4}$$

derivar

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda F2 \\ z = 0 \end{array}\right\} dl = (1, 2\lambda F, 0)$$

12º Dado el campo vectorial $\bar{a} = x^2\bar{i} - 2xy\bar{j} + (z+1)\bar{k}$ el flujo de este campo a través de la superficie lateral del cono es:



$\phi_T = \phi_{círculo} + \phi_{capirucho}$; $\frac{2\pi}{3} = \pi + \phi_{capirucho}$

$\boxed{\phi_{capirucho} = \frac{5\pi}{3}}$

$$\phi_{círculo} = \iint \bar{a}\cdot d\bar{S} = \iint (x^2, -2xy, (z+1))\cdot(0,0,1)\,dS$$

$$\phi_{círculo} = \iint \cancel{z}^{\,0}+1\,dS = S = \pi R^2 = \boxed{\pi}$$

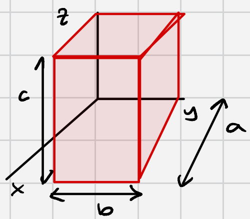
$$\phi_T = \iiint_{zyx} (2x \cancel{-2x} + 1)\,dv = v = \frac{\pi R^2 H}{3} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

13º Sea el campo $\bar{b} = 2x\bar{i} + yz\bar{j} + z\bar{k}$ el flujo del rotacional ($\phi = \iint \bar{\nabla}\times\bar{b}\cdot d\bar{s}$) a través de la superficie limitada por el contorno vale:

$$\nabla\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x & yz & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\phi = \iint 0\cdot d\bar{s} = \boxed{0}$$

14º Dado el campo $\bar{v} = Az^2\bar{k}$ (A es cte.) el flujo a través de este prisma es:



¿Superficie cerrada que encierra un volumen? sí

¿Existe en el punto? sí } Tma. de Gauss

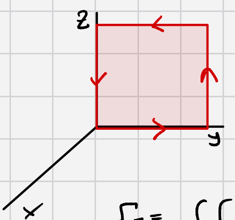
Tma. de Gauss: $\phi_T = \iiint (\nabla\cdot\bar{v})\,dv$

$$\phi_T = \iiint 2Az\cdot dv = \underset{x}{\int_0^a}\underset{y}{\int_0^b}\underset{z}{\int_0^c} 2Az\,dx\,dy\,dz = \underset{x}{\int_0^a}\underset{y}{\int_0^b}\frac{\cancel{2}Ac^2}{\cancel{2}}\,dx\,dy =$$

$\nabla\cdot\bar{v} = 2Az$

$$= \boxed{Ac^2\cdot ab}$$

15º La circulación del vector gradiente $\bar{\nabla}f$ del campo escalar $f(x,y,z) = cxz$ siendo c cte. a lo largo del cuadrado de lado b.



¿Curva cerrada? sí

¿Existe en el punto? sí } Tma. de Stockes

Tma. de Stockes: $\Gamma_T = \iint (\nabla\times\bar{F})\,d\bar{s}$

$$\Gamma_T = \iint 0\cdot d\bar{s} = \boxed{0}$$

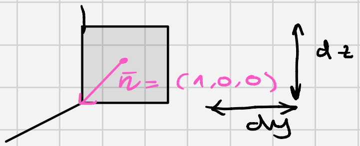
El rotacional de un campo escalar es 0.

Ahora calcularemos su flujo:

¿Es una superficie cerrada que encierra un volumen? No → no podemos utilizar Gauss.

$$\phi = \iint \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint (cz,0,cx)\cdot(1,0,0)\,dS = \int_{y\,0}^{b}\int_{z\,0}^{b} cz\cdot dy\,dz =$$

↳ $d\bar{S} = \bar{n}\cdot dS = \bar{i}\cdot dy\,dz$



$$\phi = \int_{y\,0}^{b} \frac{cb^2}{2} = \boxed{\frac{cb^3}{2}}$$

16º Dado el campo vectorial $\bar{B} = (\frac{c}{2})\bar{j}\times\bar{r}$ donde c es cte. se cumple que:

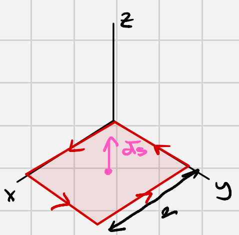
Calcular el rotacional de $\bar{B}$

$$\bar{B} = \frac{c}{2}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{c}{2}z\bar{i} - \frac{c}{2}x\bar{k}$$

$$\nabla\times\bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{c}{2}z & 0 & -\frac{c}{2}x \end{vmatrix} = \frac{c}{2}\bar{j} + \frac{c}{2}\bar{j} = \boxed{c\bar{j}}$$

VERDADERO.

19º El flujo de $\bar{A} = zxy^2\bar{j} + (z+2)\bar{k}$ a través del cuadrado en $z=0$ y cuyo lado de longitud es 2, es:



¿Encierra volumen? No → no podemos usar Gauss.

$$\phi = \iint \bar{A}\cdot d\bar{S} = \iint (0, zxy^2, (z+2))\cdot(0,0,1)\cdot dS =$$

↳ $d\bar{S} = \bar{n}\cdot dS$

$$\phi = \iint 2dS = 2\cdot S = 2\cdot 4 = \boxed{8}$$

Su circulación: ¿curva cerrada? Sí; ¿Existe en el punto? Sí } Stokes.

$$\Gamma = \iint(\nabla\times\bar{A})\,dS = \int_{x\,0}^{2}\int_{y\,0}^{2} (xy^2,0,0)\cdot(0,0,1) = \boxed{0}$$

$$\nabla\times\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & zxy^2 & z+2 \end{vmatrix} = \cancel{zy^2}^{=0}\,\bar{k} - xy^2\,\bar{i}$$

$z=0$

EJERCICIOS SOBRE LOS TEOREMAS DE INTEGRALES

1º Para el campo vectorial $\bar{A} = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$

VERDADERO O FALSO

a) $\nabla \cdot \bar{A} = 2$

$\nabla \cdot \bar{A} = \left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z} \right) = 1 + 1 + 1 = 3$ FALSO

b) $\nabla \times \bar{A} = \frac{\bar{r}}{r^2}$

$$\nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$ FALSO

c) $\nabla \cdot (\nabla \cdot \bar{A}) = 1$

$\nabla \cdot (1,1,1) = 0$ La divergencia de una cte. es 0 FALSO.

d) $\nabla |\bar{A}|^2 = 2\bar{A}$

$|\bar{A}| = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$

$\nabla |\bar{A}|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 2z)$ VERDADERO

2º Si $\bar{v}(x,y,z)$ es un campo vectorial tal que $\boxed{\nabla \cdot \bar{v} = 0}$ se puede asegurar que:

SOLENOIDAL

A) $\nabla \times \bar{v} = 0$ FALSO, si esto sólo se cumple para campos irrotacionales.

B) $\oint_C \bar{v} \cdot d\bar{l} = 0$ si C es una curva cerrada.

$\oint_C \bar{v} \cdot d\bar{l} = \iint (\nabla \times \bar{v}) ds$ no tiene porque ser 0 FALSO

c) $\oint_S \bar{v} \cdot d\bar{s} = 0$ si S es una superficie abierta. FALSO

d) $\oint_S \bar{v} \cdot d\bar{s} = 0$ si S es una superficie cerrada

VERDADERO. Si S es superficie cerrada $\rightarrow$ Gauss $\oint_S (\nabla \cdot \bar{v}) = 0$

3º Todo campo irrotacional $\bar{A}(x,y,z)$ cumple:

a) $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ FALSO (eso es solenoidal)

b) $\int_S \bar{A} \cdot d\bar{s} = 0$ para cualquier superficie de S FALSO

c) Existe un campo escalar B tal que $\bar{A} = \nabla B$ VERDADERO

(definición de irrotacional).